1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ 내림차순으로 정리하면 $3yx^3+(9y-z)x+5y-4$ 이다. ㉡ 오름차순으로 정리하면 $5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다. ㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다. ㉣ x^3 의 계수는 3이다. ㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢

② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.

㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,\ Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때, $(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$　② $x^4y^2 - xy^5$　③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$　⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

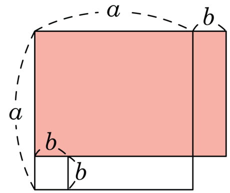
$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

3. 다음 그림에서 색칠한 부분이 나타내고 있는 곱셈공식은 무엇인가?



① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

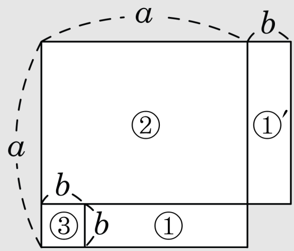
② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

해설



$(a+b)(a-b) = ①' + ②$

$①' = ①$이므로

$(a+b)(a-b) = ① + ② = a^2 - b^2$

$\therefore\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

4. 다음 곱셈공식을 전개한 것 중 바른 것은?

① $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2xy-2x-2y$

② $(a+b)^2(a-b)^2 = a^4-2a^2b^2+b^4$

③ $(-x+3)^3 = x^3-9x^2+27x-27$

④ $(a-b)(a^2+ab-b^2) = a^3-b^3$

⑤ $(p-1)(p^2+1)(p^4+1) = p^{16}-1$

해설

① $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2xy-2x+2y$

③ $(-x+3)^3 = -x^3+9x^2-27x+27$

④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$

⑤ $(p-1)(p+1)(p^2+1)(p^4+1) = p^8-1$

5. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A \triangle B = 2A + B$, $A \blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.
$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A \blacktriangledown (B \triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$
② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$
④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$\begin{aligned} A \blacktriangledown (B \triangle A) &= A \blacktriangledown (2B + A) \\ &= A - 3(2B + A) = -2A - 6B \end{aligned}$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

6. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2\\ &= (x^2+3x)+(2x+6)\\ &= x^2+(3x+2x)+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙

② 교환법칙, 분배법칙

③ 분배법칙, 결합법칙

④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙

⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 \quad (\text{분배})\\ &= (x^2+3x)+(2x+6) \quad (\text{분배})\\ &= x^2+(3x+2x)+6 \quad (\text{결합})\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

7. $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$ 의 전개식으로 옳은 것은?

① a^3+b^3 ② a^6+b^6 ③ a^6-b^6

④ a^9+b^9 ⑤ a^9-b^9

해설

(준 식)$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$

8. $a=2004$, $b=2001$ 일 때, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ 의 값은?

① 21 ② 23 ③ 25 ④ 27 ⑤ 29

해설

준 식은 $(a-b)^3$ 이다.

$a-b=2004-2001=3$

$\therefore\ (a-b)^3=3^3=27$

9. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2,\ a^2+b^2+c^2=6,\ abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=2\times(6-(-1))-3=11$

10. $x = \sqrt{3}+\sqrt{2}$이고, $a = \sqrt{3}+1$일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$의 값을 구하면?

① $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{4+\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{4}$

④ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

해설

(i) $x = \sqrt{3}+\sqrt{2}$에서 $x-\sqrt{2} = \sqrt{3}$

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$

(ii) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2-2\sqrt{2}x-3} = a^{-2}$

$$= \frac{1}{a^2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

11. $x^2+x-1=0$ 일 때, x^5-5x 의 값을 구하면?

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -3

해설

x^5-5x 를 x^2+x-1 로 나누면

즉, $x^5-5x=(x^2+x-1)\times$ 몫-3

$x^2+x-1=0$

$\therefore\ x^5-5x=-3$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$x^2=-x+1$

$$\begin{aligned}x^5-5x &= (x^2)^2\times x-5x\\ &= x(-x+1)^2-5x\\ &= x^3-2x^2-4x\\ &= x(-x+1)-2(-x+1)-4x\\ &= -x^2-x-2\\ &= -(x^2+x)-2\\ &= -1-2=-3\end{aligned}$$

12. $99 \times 101 \times (100^2 + 100 + 1) \times (100^2 - 100 + 1)$을 계산하면?

① $100^6 - 1$　② $100^6 + 1$　③ $100^9 - 1$

④ $100^9 + 1$　⑤ 1

해설

$100 = a$로 치환 하면

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= (a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1) \\
&= \left(a^3-1\right)\left(a^3+1\right) \\
&= a^6 - 1 \\
&= 100^6 - 1
\end{aligned}
$$

13. $a+b+c=1,\ ab+bc+ca=1,\ abc=1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 3　② -3　③ 1　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$1 = a^2+b^2+c^2+2$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2 = -1$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a^3+b^3+c^3-3 = 1\cdot(-1-1) = -2$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3 = 1$

14. 0이 아닌 세수 x, y, z에 대하여 x, y, z중 적어도 하나는 6이고, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$일 때, $2(x+y+z)$의 값을 구하면?

① 6 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

x, y, z중 적어도 하나가 6이므로,

$(x-6)(y-6)(z-6)=0$

$\therefore\ xyz-6(xy+yz+zx)+36(x+y+z)-216=0 \cdots ①$

또, x, y, z의 역수의 합이 $\frac{1}{6}$이므로

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6},\ \frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 6(xy+yz+zx)=xyz \cdots ②$

①, ②에서

$36(x+y+z)=216$

$\therefore\ 2(x+y+z)=12$

15. 다항식 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x^2+1) = x^4+5x^2+3$을 만족시킨다. $f(x^2-1)$을 구한 것은?

① x^4+5x^2+1 ② x^4+x^2-3 ③ x^4-5x^2+1

④ x^4+x^2+3 ⑤ 답 없음

해설

$x^2+1=t$라 하면 $x^2=t-1$

주어진 식에 대입하면

$f(t)=(t-1)^2+5(t-1)+3$

$\therefore\ f(t)=t^2+3t-1$

$$\begin{aligned} f(x^2-1) &= (x^2-1)^2+3(x^2-1)-1 \\ &= x^4+x^2-3 \end{aligned}$$