

1. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt[6]{a}$ ② $\sqrt[6]{b}$ ③ $\sqrt[6]{ab}$ ④ $\sqrt[6]{a^2b}$ ⑤ $\sqrt[6]{ab^2}$

해설

$$\begin{aligned} & \sqrt[6]{a^2b^3} \times \sqrt{ab} \div \sqrt[3]{a^2b^3} \\ &= (a^2b^3)^{\frac{1}{6}} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \div (a^2b^3)^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{2}{3}}b = a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} \\ &= a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a} \end{aligned}$$

2. 세 수 $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$ 를 작은 것부터 차례로 나열한 것은?

- ① $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$ ② $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{34}$ ③ $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[4]{10}$
④ $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{7}$ ⑤ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$

해설

$\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{4}{12}}$, $\sqrt[4]{10} = 10^{\frac{3}{12}}$, $\sqrt[6]{34} = 34^{\frac{2}{12}}$
이므로 세 수를 12제곱하면
 $7^4 = 2401$, $10^3 = 1000$, $34^2 = 1156$
따라서, 작은 것부터 차례로 나열하면
 $\therefore \sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{34}$, $\sqrt[3]{7}$

3. $(7^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}})$ 의 값은?

- ① 2 ② 6 ③ 10 ④ 14 ⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} & (7^{\frac{1}{4}} - 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{4}} + 5^{\frac{1}{4}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}}) \\ & \{ (7^{\frac{1}{4}})^2 - (5^{\frac{1}{4}})^2 \} (7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}}) \\ & = (7^{\frac{1}{2}} - 5^{\frac{1}{2}})(7^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}}) = (7^{\frac{1}{2}})^2 - (5^{\frac{1}{2}})^2 \\ & = 7 - 5 = 2 \end{aligned}$$

4. 실수 x, y 에 대하여 $57^x = 27$, $513^y = 81$ 일 때, $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$57^x = 27 = 3^3 \text{에서 } 57 = (3^3)^{\frac{1}{x}} = 3^{\frac{3}{x}} \cdots \text{㉠}$$

$$513^y = 81 = 3^4 \text{에서 } 513 = (3^4)^{\frac{1}{y}} = 3^{\frac{4}{y}} \cdots \text{㉡}$$

㉠ $\div$ ㉡을 하면

$$\frac{1}{9} = 3^{\frac{3}{x}} \div 3^{\frac{4}{y}} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$3^{-2} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2$$

5. 다음 식의 값을 구하여라.

$$\log_{10} 2 + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_{10} \left(1 + \frac{1}{99}\right)$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} & \log_{10} 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{99}\right) \\ &= \log_{10} \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{99}{98} \cdot \frac{100}{99} \\ &= \log_{10} 100 = 2 \end{aligned}$$

6. $\log_4 2 + \log_8 4 - \log_{16} 8$ 의 값은?

- ① $-\frac{1}{12}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{12}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{12}$

해설

$$\begin{aligned} & \log_{2^2} 2 + \log_{2^3} 2^2 - \log_{2^4} 2^3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{6+8-9}{12} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

7. $8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}}$ 의 값을 2^x 라고 할 때, x 의 값을 구하면?

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned} 8^{\frac{4}{3}} \times 4^{\frac{2}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} &= 2^4 \times 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{4+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^5 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 5$$

8. $2^x = 3$ 일 때, $\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{8}$

② $\frac{3}{13}$

③ $\frac{3}{10}$

④ $\frac{3}{8}$

⑤ $\frac{3}{7}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{2^x - 2^{-x}}{4^x - 4^{-x}} &= \frac{2^x - \frac{1}{2^x}}{(2^x)^2 - \frac{1}{(2^x)^2}} \\ &= \frac{3 - \frac{1}{3}}{3^2 - \frac{1}{3^2}} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{80}{9}} = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

9. 지진이 발생할 때, 지진의 세기를 진도라 하며 보통 리히터수로 나타낸다. 지질학자 C.F.Richer는 강도가 I 인 지진의 진도 R 을 다음과 같이 정의하였다.

$$R = \log \frac{I}{I_0} \text{ (단, } I_0 \text{는 표준지진의 강도)}$$

리히터수로 진도 6.8인 지진의 강도는 리히터 수로 진도 4.8인 지진의 강도의 몇배인가?

- ① 1.4배
- ② 2배
- ③ $\sqrt{10}$ 배
- ④ 10배
- ⑤ 100배

해설

진도가 4.8, 6.8일 때의 지진의 강도를 각각 I_1 , I_2 라 하면

$$4.8 = \log \frac{I_1}{I_0}, \quad 6.8 = \log \frac{I_2}{I_0} \text{ 이므로}$$

$$\therefore \log \frac{I_2}{I_1} = \frac{10^{6.8}}{10^{4.8}} = 100(\text{배})$$

10. $\frac{1}{2} \log_2 3 + 5 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ $\frac{3}{2}$

④ 2

⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \log_2 3 + 5 \log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6} \\ &= \log_2 \sqrt{3} + \log_2 4 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6} \\ &= \log_2 \frac{\sqrt{3} \times 4 \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \\ &= \log_2 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

11. $\log_a 27 = -2, \log_{\sqrt{3}} b = 3$ 일때, ab 의 값은?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$$\log_a 27 = -2 \text{에서 } a^{-2} = 27 = 3^3$$

$$\therefore a = 3^{-\frac{3}{2}} (\because a > 0)$$

$$\log_{\sqrt{3}} b = 3 \text{에서 } b = (\sqrt{3})^3 = (3^{\frac{1}{2}})^3 = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore ab = 3^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = 3^0 = 1$$

12. 세 수 $3\log_3 3$, $\log_2 3$, $2\log_2 4$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $2\log_2 4 < 3\log_3 3 < \log_2 3$ ② $\log_2 3 < 2\log_2 4 < 3\log_3 3$
③ $\log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$ ④ $3\log_3 3 < 2\log_2 4 < \log_2 3$
⑤ $3\log_3 3 < \log_2 3 < 2\log_2 4$

해설

$$\begin{aligned} 3\log_3 3 &= 3 \\ \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 &\quad \therefore 1 < \log_2 3 < 2 \\ 2\log_2 4 &= 4 \\ \therefore \log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4 \end{aligned}$$

13. 데시벨(dB)은 소리의 세기를 표준음의 세기 $10^{-12}\text{W}/\text{m}^2$ 와 비교해서 나타낸다. 소리의 세기 $x\text{W}/\text{m}^2$ 를 ydB로 나타내는 식은 다음과 같다.

$$y = 120 + 10 \log x$$

요란한 음악의 세기가 130dB 일 때, 이것은 표준음의 세기의 몇 배인가?

- ① 10^9 배

② 10^{10} 배

③ 10^{11} 배

④ 10^{12} 배

⑤ 10^{13} 배

해설

요란한 음악의 세기가 130dB 이므로 이 소리의 세기를 a 라 하면
 $130 = 120 + 10 \log a$
 $10 = 10 \log a$
 $1 = \log a$
 $\therefore a = 10$
따라서 표준음의 세기의 $\frac{10}{10^{-12}} = 10^{1-(-12)} = 10^{13}$ (배)

14. $3^x = 2 + \sqrt{2}$, $3^y = 2 - \sqrt{2}$ 일 때, $x + y$ 의 값은?

① 1

② $\log_4 3$

③ $\log_3 2$

④ $\log_3 4$

⑤ $\log_4 10$

해설

$x = \log_3(2 + \sqrt{2})$, $y = \log_3(2 - \sqrt{2})$ 이므로

$x + y = \log_3 \{(2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2})\} = \log_3 2$

15. $\log_2(\log_8 x) = -1$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2\sqrt{2}$

해설

$\log_2(\log_8 x) = -1$ 에서

$$\log_8 x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 8^{\frac{1}{2}} = (2^3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

16. 16의 네제곱근 중 음수인 것을 a , -27 의 세제곱근 중 실수인 것을 b 라 할 때, ab 의 값은?

① -12

② -6

③ 6

④ 12

⑤ 36

해설

16의 네제곱근 중 음수인 것은

$$-\sqrt[4]{16} = -2 \quad \therefore a = -2$$

-27 의 세제곱근을 x 라 하면

$$x^3 = -27, \quad (x+3)(x^2-3x+9) = 0$$

이때, -27 의 세제곱근 중 실수인 것은 -3 이다.

$$\therefore b = -3$$

$$\therefore ab = (-2) \times (-3) = 6$$

17. $x > 0$, $x \neq 1$ 일 때, $\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[k]{x^k}$ 을 만족하는 자연수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\sqrt[4]{x\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^2}\sqrt{x^3}} = \sqrt[4]{\sqrt{x^5}} = \sqrt[8]{x^5}$$

18. 양의 실수 a 에 대하여 $\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}}$ 의 값은? (단, $a \neq 1$)

- ① $\sqrt[5]{a}$ ② $\frac{1}{\sqrt[5]{a}}$ ③ 1 ④ $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ ⑤ $\sqrt[3]{a}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \div \sqrt[3]{\frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt{a}}} &= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a}}} \\ &= \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[5]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[3]{\sqrt{a}}}{\sqrt[3]{\sqrt[5]{a}}} = \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[3]{a}} \times \frac{\sqrt[5]{a}}{\sqrt[5]{a}} \times \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \end{aligned}$$

19. $5^a = 2$, $5^b = 3$ 이라 할 때, $\log_6 72$ 를 a 와 b 의 식으로 바르게 나타낸 것은?

① $\frac{a+b}{a-b}$
④ $\frac{2a+b}{a+b}$

② $\frac{2a+b}{b-a}$
⑤ $\frac{3a+2b}{a+b}$

③ $\frac{2a-b}{a+b}$

해설

$$a = \log_5 2, b = \log_5 3$$

$$\log_6 72 = \frac{3 \log_5 2 + 2 \log_5 3}{\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{3a + 2b}{a + b}$$

20. 방정식 $2x^2 - 8x - 1 = 0$ 의 두 근이 $\log_{10} a$, $\log_{10} b$ 일 때, $\log_a b + \log_b a$ 의 값은?

① -2

② -8

③ -12

④ -26

⑤ 34

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\log_{10} a + \log_{10} b = 4,$$

$$\log_{10} a \cdot \log_{10} b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a = \frac{\log_{10} b}{\log_{10} a} + \frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$$

$$= \frac{(\log_{10} a + \log_{10} b)^2 - 2 \log_{10} a \cdot \log_{10} b}{\log_{10} a \cdot \log_{10} b}$$

$$= \frac{16 + 1}{-\frac{1}{2}} = -34$$