

1. 두 직선 $ax+4y-4=0$, $x+2y+b=0$ 이 수직일 때의 a 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

수직조건 $a \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 0$

$\therefore a = -8$

2. 중심이 $(2, -1)$ 이고 원점을 지나는 원의 방정식을 구하면?

① $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$ ② $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 7$

③ $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 8$ ④ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

⑤ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$

해설

구하는 원의 방정식을

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{1} \text{으로 놓으면}$$

이 원이 원점 $(0,0)$ 을 지나므로

$$(0-2)^2 + (0+1)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 5$$

이것을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5$$

3. x 축 위의 점 P로부터 두 직선 $2x - y + 1 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$ 까지의 거리가 같다. 점 P의 좌표를 $(a, 0)$, $(b, 0)$ 이라 할 때 $-ab$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

P의 좌표를 $(\alpha, 0)$ 이라 하면

P에서 두 직선까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|2\alpha + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|\alpha - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$\therefore |2\alpha + 1| = |\alpha - 2|$$

$$\therefore 2\alpha + 1 = \pm(\alpha - 2)$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{3}, -3$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}, 0\right), (-3, 0) \text{ 이므로}$$

$$-ab = -\frac{1}{3} \times -3 = 1$$

4. 세 점 A(-1, 0), B(2, -3), C(5, 3)에 대하여 등식 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{CP}^2$ 을 만족하는 점 P의 자취의 방정식은 $ax + y + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

주어진 조건에서,

$$(x+1)^2 + y^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2$$

$$= 2[(x-5)^2 + (y-3)^2]$$

$$2x^2 - 2x + 2y^2 + 6y + 14$$

$$= 2(x^2 - 10x + y^2 - 6y + 34)$$

$$18x + 18y - 54 = 0$$

$$\Rightarrow x + y - 3 = 0$$

$$\therefore a + b = 1 + (-3) = -2$$

5. 직선 $x + 3y - k = 0$ 이 원 $(x - 5)^2 + y^2 = 3$ 의 넓이를 이등분할 때, k 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

직선이 원의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심을 지나면 된다.

따라서 원의 중심 (5, 0)이 직선 위에 있으므로 $5 - k = 0$

$\therefore k = 5$

6. 점 $(1, 1)$ 을 지나고, x 축과 y 축을 동시에 접하는 원은 두 개 존재한다. 이때, 두 원의 중심거리는 얼마인가?

- ① $\sqrt{2}$
- ② $\sqrt{3}$
- ③ 2
- ④ $\sqrt{6}$
- ⑤ 4

해설

x 축 및 y 축에 동시에 접하는 원의 중심은 (a, a) 로 나타낼 수 있다.
또한 반지름 역시 a 로 볼 수 있다.
따라서 (a, a) 를 중심으로 하는 원의 방정식은 $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$ 이다.
점 $(1, 1)$ 은 이 원 위의 점이므로 등식을 만족시킨다.
따라서 $a = 2 \pm \sqrt{2}$ 임을 알 수 있다.
두 점 사이의 거리 공식에 의해 두 원의 중심거리를 구하면
중심거리 d 는 $\sqrt{2((2 + \sqrt{2}) - (2 - \sqrt{2}))^2} = 4$ 이다.

7. 두 원 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$ 과 $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ 의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 5$

② $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

③ $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 10$

④ $(x+3)^2 + (y-1)^2 = 10$

⑤ $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$

해설

두 원의 교점을 지나는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 + k(x^2 + y^2 - 2x - 1) = 0$$

이 원이 원점을 지나므로

$x = y = 0$ 을 대입하면

$$-2 - k = 0$$

$$\therefore k = -2$$

따라서 구하는 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 - 2(x^2 + y^2 - 2x - 1) = 0$$

$$-x^2 - y^2 + 6x - 4y = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$$

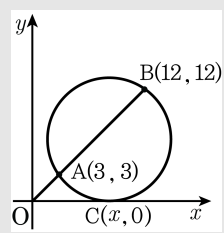
$$\therefore (x-3)^2 + (y+2)^2 = 13$$

8. 좌표평면 위의 두 점 $(3, 3)$, $(12, 12)$ 를 지나고 x 축의 양의 부분과 접하는 원 O 의 접점의 x 좌표는 ?

- ① $\frac{3}{2}$ ② 6 ③ $\frac{5}{2}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

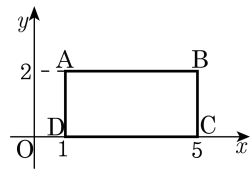
해설

그림에서 $\overline{OC}^2 = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$



$$x^2 = \sqrt{3^2 + 3^2} \cdot \sqrt{12^2 + 12^2} = 72 \quad x = 6\sqrt{2}$$

9. 점 $(-1, -1)$ 을 지나고 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $ax + by + 1 = 0$ 일 때, $a - b$ 의 값은?



- ① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1, -1)$ 을 지나므로, $-a - b + 1 = 0 \cdots \textcircled{1}$
그리고 직선이 사각형을 이등분 하려면 사각형의 중심
 $(\frac{5+1}{2}, \frac{0+2}{2})$ 를 지나야 한다.
 $\Rightarrow 3a + b + 1 = 0 \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 을 연립하면, $a = -1, b = 2$
 $\therefore a - b = -3$

10. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 (3, 1)을 지날 때, 점 P의 좌표를 (a, b) , (c, d) 라 할 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1) 이라 하면 접선은

$$x_1x + y_1y = 5 \cdots \textcircled{1}$$

이것이 점 (3, 1)을 지나므로

$$3x_1 + y_1 = 5 \cdots \textcircled{2}$$

또, (x_1, y_1) 은 $x^2 + y^2 = 5$

위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots \textcircled{3}$

②에서 $y_1 = 5 - 3x_1$ 을 ③에 대입하면

$$x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 - 5 = 0,$$

$$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$$

$$10(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$$

$\therefore x_1 = 1$ 이면 $y_1 = 2$, $x_1 = 2$ 이면 $y_1 = -1$

$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$