

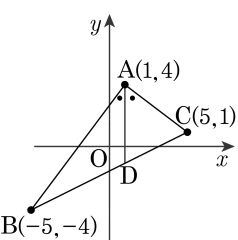
1. 부등식 $ax^2 + bx + a^2 > 2$ (a, b 는 실수)의 해가 $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ 일 때, $2a - b$ 의 값을 구하면?

① -5 ② -6 ③ -7 ④ -8 ⑤ -9

해설

$ax^2 + bx + a^2 - 2 > 0 \dots\dots \textcircled{1}$
해가 $1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ 인 이차부등식은
 $\{x - (1 - \sqrt{2})\} \{x - (1 + \sqrt{2})\} < 0$
즉, $x^2 - 2x - 1 < 0 \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 부등호의 방향이 같으려면
 $a < 0$ 이어야 한다.
 $\textcircled{2}$ 의 양변에 a 를 곱하면 $ax^2 - 2ax - a > 0$
 $\textcircled{1}$ 과 일치하여야 하므로
 $b = -2a, a^2 - 2 = -a$
 $a^2 - 2 = -a$ 에서 $(a - 1)(a + 2) = 0$
그런데, $a < 0$ 이므로 $a = -2, b = 4$
 $\therefore 2a - b = -8$

2. 다음 그림과 같이 세 점 $A(1, 4)$, $B(-5, -4)$, $C(5, 1)$ 를 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\triangle ABD$ 와 $\triangle ACD$ 의 넓이의 비는?



- ① $1 : 1$ ② $\sqrt{2} : 1$ ③ $\sqrt{3} : 1$
 ④ $2 : 1$ ⑤ $\sqrt{5} : 1$

해설

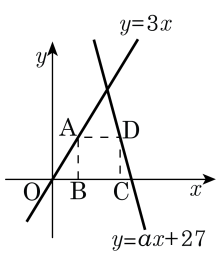
두 삼각형의 넓이비는 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 이고
 각의 이등분선정리에 의해

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{(1+5)^2 + (4+4)^2}}{\sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = 2$$

$$\therefore \triangle ABD : \triangle ACD = 2 : 1$$

3. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프가 점 A를 지나고, 일차함수 $y = ax + 27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x 축 위의 점이다.)



- ① -4 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -5
 ④ $-\frac{11}{2}$ ⑤ -6

해설

$\overline{AB} = 3$ 이므로 점 A의 y 좌표는 3 이고,
 점 A는 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1 이다.
 점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 (1, 0)이고, $\overline{BC} = 3$ 이므로
 점 C의 좌표는 (4, 0)이다.
 점 C와 x 좌표가 같고, 점 A와 y 좌표가 같은 점 D의 좌표는
 (4, 3)이다.
 점 D가 일차함수 $y = ax + 27$ 위의 점이므로 $x = 4$, $y = 3$ 를
 대입하면 $3 = a \times 4 + 27$
 $\therefore a = -6$

4. 두 원 $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 1$, $C_2 : (x-3)^2 + y^2 = 1$ 에 동시에 외접하는 제1 사분면 위의 원 C_3 가 있다. 세 원의 중심을 이은 삼각형이 정삼각형이 될 때, 원점에서 원 C_3 의 중심까지의 거리를 d , 원 C_3 의 반지름의 길이를 r 라 하자. 이때, $d \times r$ 의 값은?

- ① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{6}$ ④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

세 원의 중심을 각각 A, B, C 라 하면,
두 원의 중심의 좌표가 A(1, 0), B(3, 0)
이다.

$\overline{AC} = 2$ 이고 삼각형 ABC 가
정삼각형이므로 C(a , b) 라 하면

$$a = 1 + \overline{AC} \cos 60^\circ, b = \overline{AC} \sin 60^\circ$$

$$\therefore C(2, \sqrt{3})$$

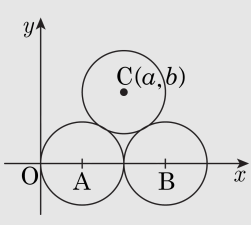
따라서 원 C_3 는 중심이 $(2, \sqrt{3})$ 이고

반지름의 길이가 1 인 원이므로, 원점에서

원의 중심 C($2, \sqrt{3}$) 까지의 거리는

$$d = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$$

$$\therefore d \times r = \sqrt{7}$$



5. 자연수로 이루어진 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 $n-1$ 과, n 을 포함하지 않은 부분집합의 개수가 64 일 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로

$2^{n-2} = 64 = 2^6$ 이다.

$\therefore n-2 = 6, n = 8$

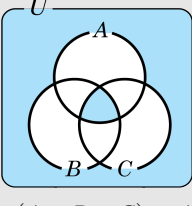
6. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 세 부분집합
 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 3\text{의 배수}\}$,
 $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\}$,
 $C = \{1, 2, 5, 7, 11, 12\}$ 에 대하여 $A \Delta B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 일 때,
 $n((A \Delta B) \cap (A \Delta C))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(A \Delta B) \cap (A \Delta C)$ 를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$$n(A \cap B \cap C) = 1, n((A \cup B \cup C)^c) = 4$$

$$\therefore n((A \Delta B) \cap (A \Delta C)) = 1 + 4 = 5$$

7. 다음은 명제 ‘세 자연수 a, b, c 에 대하여, $a^2 + b^2 = c^2$ 이면, a, b, c 중 적어도 하나는 3의 배수이다.’의 참, 거짓을 대우를 이용하여 판별하는 과정이다.

주어진 명제의 대우는
‘세 자연수 a, b, c 에 대하여 a, b, c 모두 3의 배수가 아니면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ ’이므로
 $a^2 + b^2 = 3m + [\text{㉠}], c^2 = 3n + [\text{㉡}]$
 $\therefore a^2 + b^2 \neq c^2$ (단, m, n 은 음이 아닌 정수) 따라서 대우가
[㉢] 이므로 주어진 명제도 [㉢] 이다.

위의 과정에서, ㉠, ㉡, ㉢에 들어갈 알맞은 것을 순서대로 바르게 나열한 것은?

- ① 1, 0, 참 ② 1, 2, 거짓 ③ 2, 1, 참
- ④ 2, 0, 참 ⑤ 0, 1, 참

해설

(대우 ‘ a, b, c 모두 3의 배수가 아니라면 $a^2 + b^2 \neq c^2$ ’
이것의 참, 거짓을 증명하는 과정이다.
 $a = 3p \pm 1, b = 3q \pm 1, c = 3r \pm 1$ 이면 $a^2 = 3(3p^2 \pm 2p) + 1, b^2 = 3(3q^2 \pm 2q) + 1$ 이므로
 $a^2 + b^2 = 3m + 2$ (m 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
 $\therefore [\text{㉠}] = 2$
그리고 $c^2 = 3(3r^2 \pm 2r) + 1$ 이므로
 $c^2 = 3n + 1$ (n 은 음이 아닌 정수)의 꼴이다.
 $\therefore [\text{㉡}] = 1$
 $\therefore a^2 + b^2 \neq c^2$
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.
 $\therefore [\text{㉢}] = \text{참}$

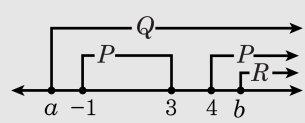
8. $-1 \leq x \leq 3$ 또는 $x \geq 4$ 이기 위한 필요조건은 $x \geq a$ 이고, 충분조건은 $x \geq b$ 일 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$P = \{x \mid -1 \leq x \leq 3 \text{ or } x \geq 4\}$, $Q = \{x \mid x \geq a\}$, $R = \{x \mid x \geq b\}$

이라 하면 $P \subset Q$, $R \subset P$



$a \leq -1$, $b \geq 4$

$\therefore -1 + 4 = 3$

9. 함수 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f^9\left(\frac{1}{2}\right) + f^{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면?
(단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

- ① $\frac{80}{399}$ ② $\frac{82}{399}$ ③ $\frac{83}{399}$ ④ $\frac{85}{399}$ ⑤ $\frac{86}{399}$

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{4x+1}$$

이제 $f^{n-1}(x) = \frac{x}{(n-1)x+1}$ 라고 놓으면

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f\left(\frac{x}{(n-1)x+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{(n-1)x+1}}{\frac{x}{(n-1)x+1} + 1} = \frac{x}{(n-1)x+1+x}$$

$$= \frac{x}{nx+1}$$

$$\therefore f^9(2) + f^{10}(2) = \frac{2}{9 \cdot 2 + 1} + \frac{2}{10 \cdot 2 + 1} = \frac{80}{399}$$

10. $a + b + c = 0$ 일 때, $a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

(주어진 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{a(b+c)}{bc} + \frac{b(c+a)}{ca} + \frac{c(a+b)}{ab} \\ &= \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{abc} \\ &= \frac{(b+c)^3 + b^2(-b) + c^2(-c)}{-(b+c)bc} \\ &= \frac{(b+c)^3 - (b^3 + c^3)}{-(b+c)bc} \\ &= \frac{3bc(b+c)}{-(b+c)bc} = -3 \end{aligned}$$

11. 실수 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ 가 $16 + x_1 \times x_2 \times \dots \times x_9 = 0$ 을 만족할 때, $\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2} \times \dots \times \sqrt{x_9}$ 의 값들의 곱을 구하면?

- ① 8
- ② 16
- ③ 24
- ④ 36
- ⑤ 14

해설

$x_1 \times x_2 \times \dots \times x_9 = -16$ 이므로
 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.
이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여
 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ ($y_i > 0$) 이라 하고 양수인 것들은
 $z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ ($z_i > 0$) 이라 하자.
그러면 $y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n = 16$ ($m + n = 9, m : \text{홀수}$)
i) $m = 4k + 1$ ($k = 0, 1, 2$) 일 때,
$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n} \cdot i^{4k+1} \\&= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i \\&= 4i\end{aligned}$$

ii) $m = 4k + 3$ ($k = 0, 1$) 일 때,
$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n} \cdot i^{4k+3} \\&= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i^3 \\&= -4i\end{aligned}$$

 $\therefore$ i), ii) 에서 $4i \times (-4i) = 16$

12. 380 명을 한 방에 15 명씩 나누면 방이 모자라고, 한 방에 16 명씩 나누면 몇 개의 방은 16 명 미만의 사람이 들어간다. 만약 방을 6 개 더 배정하면 한 방에 15 명씩 나누어도 80 명이 더 들어갈 수 있다고 할 때, 방의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 24 개

해설

방의 개수를 x 개라 하면
 $15x < 380 < 16x$
 $15(x + 6) \leq 380 + 80$
연립하여 계산하면
 $\frac{95}{4} < x \leq \frac{74}{3}$
 $23.75 < x \leq 24.66...$
따라서 방의 개수는 24 개이다.

13. 이차방정식 $ax^2 - (a-3)x + a-2 = 0$ 이 적어도 한 개의 정수근을 갖도록 하는 정수 a 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

이차방정식이므로 $a \neq 0$ 이고

실근을 가지므로

$$D = (a-3)^2 - 4a(a-2) \geq 0$$

$$3a^2 - 2a - 9 \leq 0$$

$$\therefore \frac{1 - \sqrt{28}}{3} \leq a \leq \frac{1 + \sqrt{28}}{3}$$

$-1.\times\times\cdots \leq a \leq 2.\times\times\cdots$ 이므로

a 의 정수값은 $-1, 0, 1, 2$

그런데 $a \neq 0$ 이고 $a = 1$ 일 때는 정수근이 없다.

$\therefore a = -1, 2$ 이고 구하는 합은 1

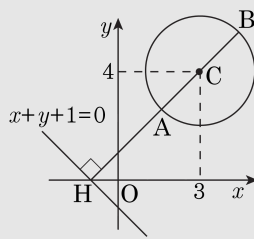
14. 원 $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ 위의 점에서 직선 $x + y + 1 = 0$ 에 이르는 거리의 최대값과 최소값의 합은?

- ① $4\sqrt{2}$
- ② $8\sqrt{2}$
- ③ $8\sqrt{2} + 2$
- ④ $8\sqrt{2} + 4$
- ⑤ $16\sqrt{2}$

해설

$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$

다음 그림에서 원 위의 점 A에서 직선 $x + y + 1 = 0$ 까지의 최댓값과 최솟값은 $\overline{BH}$, $\overline{AH}$ 의 길이이다.



$$\begin{aligned} \overline{AH} + \overline{BH} &= (\overline{CH} - \overline{CA}) + (\overline{CH} + \overline{CA}) \\ &= 2\overline{CH} = 2 \cdot \frac{|3 + 4 + 1|}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

15. 1, 2, 3 번 문제의 정답률을 100 명의 학생을 대상으로 조사하였다. 1 번 문제를 맞힌 학생은 50 명, 2 번 문제를 맞힌 학생은 35 명, 3 번 문제를 맞힌 학생은 45 명이었다. 또, 1 번 문제를 맞히고 2 번 문제를 틀린 학생은 35 명, 2 번 문제를 맞히고 3 번 문제를 틀린 학생은 25 명, 3 번 문제를 맞히고 1 번 문제를 틀린 학생은 33 명이었다. 1, 2, 3 번 문제를 모두 틀린 학생이 5 명일 때, 두 문제만 맞힌 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : 2 명

▷ 정답 : 31 명

해설

전체 학생의 집합 U 라 두고, 1 번 문제를 맞힌 학생의 집합 A , 2 번 문제를 맞힌 학생의 집합 B , 3 번 문제를 맞힌 학생의 집합을 C 라 두면,
 $n(U) = 100, n(A) = 50, n(B) = 35, n(C) = 45$ 이다.
1 번 문제를 맞히고 2 번 문제를 틀린 학생 수
 $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 35 \rightarrow n(A \cap B) = 15$
2 번 문제를 맞히고 3 번 문제를 틀린 학생 수
 $n(B - C) = n(B) - n(B \cap C) = 25 \rightarrow n(B \cap C) = 10$
3 번 문제를 맞고 1 번 문제를 틀린 학생 수
 $n(C - A) = n(C) - n(C \cap A) = 33 \rightarrow n(C \cap A) = 12$
1, 2, 3 번 문제를 모두 틀린 학생 수
 $n(U) - n(A \cup B \cup C) = 5 \rightarrow n(A \cup B \cup C) = 95$
 $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - (n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A)) + n(A \cap B \cap C)$ 이므로,
 $95 = 50 + 35 + 45 - 15 - 10 - 12 + n(A \cap B \cap C)$
 $\rightarrow n(A \cap B \cap C) = 2,$
두 문제만 맞힌 학생 수는
 $n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C)$
 $\therefore n(A \cap B) + n(B \cap C) + n(C \cap A) - 3n(A \cap B \cap C) = 15 + 10 + 12 - 6 = 31$

16. x 의 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + bx - 27 = 0$ 이 세 개의 양의 실근을 갖는다.
이 때, 실수 a, b 에 대하여 a 의 최소값과 b 의 최소값의 차는?

① 6 ② 12 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

해설

세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = a,$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b, \alpha\beta\gamma = 27$$

산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$a = \alpha + \beta + \gamma \geq 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}$$

$$= 3\sqrt[3]{27} = 9$$

$$b = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 3\sqrt{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = 27$$

$$\therefore 27 - 9 = 18$$

17. a, b, c 가 실수일 때, $a + b = 4ab$, $b + c = 6bc$, $c + a = 8ca$ 이다.
 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 의 값을 구한 것은?

- ① $\frac{1}{18}$ ② $\frac{1}{9}$ ③ 9 ④ 18 ⑤ 1

해설

준식을 변형하면 $\frac{a+b}{ab} = 4 \dots ①$

$$\frac{b+c}{bc} = 6 \dots ②$$

$$\frac{c+a}{ca} = 8 \dots ③ \text{에서}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = 4 \dots ①'$$

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc} = 6 \dots ②'$$

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{a+c}{ca} = 8 \dots ③'$$

①' + ②' + ③' 하면

$$2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 18$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 9$$

18. 분수함수 $y = \frac{x+k}{x}$ ($k \neq 0$) 에 대한 설명으로 다음 중 옳지 않은 것은?
- ① 치역은 1을 제외한 실수 전체집합이다.
 - ② 점(0, 1)에 대하여 대칭이다.
 - ③ $|k|$ 가 클수록 곡선은 점 (0, 1)에 가까워진다.
 - ④ 점근선은 $x = 0, y = 1$ 이다.
 - ⑤ $y = -x + 1$ 에 대하여 대칭이다.

해설

- ① 정의역은 $x \neq 0$ 인 실수, 치역은 $y \neq 1$ 인 실수
- ② 점근선의 교점인 (0, 1) 에 대해 대칭이다.
- ③ $|k|$ 가 클수록 곡선은 점 (0, 1)에서 멀어진다.
- ④ 점근선은 $x = 0, y = 1$ 이다.
- ⑤ 기울기가 ± 1 이고 (0, 1)을 지나는 직선에 대칭이다.

19. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$ 일 때, $x^2 + \sqrt{6}x$ 의 값은? (단, $0 < x < 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 8$ 의 양변에 x^2 을 곱하고 정리하면

$$(x^2)^2 - 8x^2 + 1 = 0$$

근의 공식으로 풀면

$$x^2 = 4 - \sqrt{15} \quad (\because 0 < x < 1) \dots \textcircled{1}$$

$$x = \sqrt{4 - \sqrt{15}} \quad (\because 0 < x)$$

$$= \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{15}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \dots \textcircled{2}$$

①, ②에 따라

$$x^2 + \sqrt{6}x$$

$$= (4 - \sqrt{15}) + \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$= 4 - \sqrt{15} + \sqrt{15} - 3 = 1$$