1. 다항식 $x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$를 일차식의 곱으로 인수분해 하였을 때, 그 인수들의 합을 구하면?

① $x+2y+1$ ② $x+y-3$ ③ $2x+3y+2$
④ $x+y-2$ ⑤ $2x+3y-1$

해설

$x^2+3xy+2y^2-x-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+2y^2-3y-2$
$=x^2+(3y-1)x+(y-2)(2y+1)$
$=(x+y-2)(x+2y+1)$

2. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하면? $2f(x)-f(-x)=x^2-3x+8$

① $\frac{27}{4}$ ② $\frac{29}{4}$ ③ $\frac{31}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

$f(x)=ax^2+bx+c$ 라고 하면

$2(ax^2+bx+c)-(ax^2-bx+c)=x^2-3x+8$

$\Rightarrow b=-1, c=8, a=1$

$\therefore\ f(x)=x^2-x+8=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{31}{4}$

$\Rightarrow$ 최솟값 : $\frac{31}{4}$

3. 부등식 $|x|+|x-2| \leq 3$을 만족하는 x의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라고 할 때, $m+M$의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

i) $x<0$일 때 $-2x+2 \leq 3$, $x \geq -\frac{1}{2}$

$\therefore -\frac{1}{2} \leq x < 0$

ii) $0 \leq x < 2$일 때 $2 \leq 3$ $\therefore 0 \leq x < 2$

iii) $x \geq 2$일 때 $2x-2 \leq 3$, $x \leq \frac{5}{2}$ $\therefore 2 \leq x \leq \frac{5}{2}$

i) 또는 ii) 또는 iii) 을 만족하는 범위를 구하면

$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$ $\therefore m+M=2$

4. 원 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ 에 의하여 잘려지는 x축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y = 0$ 이므로
$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+8) = 0$
$\Rightarrow x = -2, \ -8$
$\therefore$ x 축 위의 교점 : $(-8, \ 0), \ (-2, \ 0)$
$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

5. 평행이동 $f:(x,\ y) \rightarrow (x+a,\ y+4)$ 에 의해 원 $x^2+y^2=1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행이동 $f:(x,\ y) \rightarrow (x+a,\ y+4)$ 는
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
4 만큼 평행이동하는 것이므로
원 $x^2+y^2=1$ 을 평행이동하면 원의 중심
$(0,\ 0)$ 은 $(a,\ 4)$ 로 옮겨진다.
이 때, 두 점 $(0,\ 0)$ 과 $(a,\ 4)$ 의 거리가 5 이므로
$\sqrt{a^2+4^2}=5$
위의 식의 양변을 제곱하면
$a^2+16=25,\ a^2=9$
그런데 $a>0$ 이므로 $a=3$

6. 두 집합 $A = \{2, 4, a^2 - a - 1\}$, $B = \{2, a+2, a^2 - 2a\}$에 대하여 $A \cap B = \{2, 5\}$일 때의 a값을 구하고 이 때, 집합 A의 모든 원소의 합을 b라 하면 다음 중 $a \times b$를 맞게 계산한 것은?

① -22　② 15　③ 33　④ 13　⑤ 11

해설

$A \cap B = \{2, 5\}$ 이므로 $a^2 - a - 1 = 5$

$a^2 - a - 6 = 0,\ (a-3)(a+2) = 0,$

$a = -2$ 또는 3

$a = -2$ 이면 $B = \{2, 0, 3\}$이므로 조건에 어긋난다.

$\therefore\ a = 3$

그리고 $A = \{2, 4, 5\}$이므로 원소의 합 $b = 11$ $\therefore\ ab = 33$

7. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 $\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

① $r \Rightarrow p$　　② $\sim p \Rightarrow \sim s$　　③ $\sim s \Rightarrow \sim r$

④ $r \Rightarrow \sim s$　　⑤ $\sim q \Rightarrow s$

해설

$\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 의 각각의 대우는 $q \Rightarrow p, \sim q \Rightarrow \sim r, \sim s \Rightarrow \sim r$

따라서 $\sim p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim r \Rightarrow s, r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이므로 $\sim q \Rightarrow s, r \Rightarrow p$

8. 자연수 n을 $n = 2^p \cdot k$ (p는 음이 아닌 정수, k는 홀수)로 나타낼 때, $f(n) = p$라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$이다. 다음 <보기>중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

㉠ n이 홀수이면 $f(n) = 0$이다.

㉡ $f(8) < f(24)$이다.

㉢ $f(n) = 3$인 자연수 n은 무한히 많다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$에서
㉠ n이 홀수이면, k가 홀수이므로 2^p이 홀수
$\therefore p = 0$ 즉, $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
$\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k는 무수히 많으므로 n도 무수히 많다.

9. 함수 $f(x) = 2x + |x|$의 역함수를 $g(x) = ax + b|x|$라 할 때, $3ab$의 값을 구하면?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

해설

$f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} 3x & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases}$ 의

역함수를 구한 것이

$g(x) = \begin{cases} (a+b)x & (x \geq 0) \\ (a-b)x & (x < 0) \end{cases}$ 가 되어야한다.

(i) $x \geq 0$일 때, $y = 3x$의 역함수를 구하면

$x = 3y(y \geq 0)$, 즉 $y = \frac{x}{3}$ $(x \geq 0)$

$\therefore a + b = \frac{1}{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $x < 0$일 때, $y = x$의 역함수를 구하면

$x = y$ $(y < 0)$, 즉 $y = x$ $(x < 0)$

$\therefore a - b = 1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$

$\therefore 3ab = -\frac{2}{3}$

10. 다음 식의 최댓값을 구하면?

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots\cdots + \frac{1}{(x+9)(x+10)}$$

① $\frac{3}{5}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $-\frac{1}{5}$　⑤ $-\frac{2}{5}$

해설

$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$,

$\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \cdots \frac{1}{(x+9)(x+10)}$

$= \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10}$

$\therefore$ (준식) $= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} = \frac{x+10-x}{x(x+10)}$

$= \frac{10}{x(x+10)} = \frac{10}{(x+5)^2 - 25}$

$\therefore$ 최댓값은 $x = -5$ 일 때 $\frac{10}{-25} = -\frac{2}{5}$

11. 실수 a, b, c에 대하여 $a+b+c=6$, $a^2+b^2+c^2=12$를 만족할 때, $a^3+b^3+c^3$의 값을 구하면?

① 8　　② 16　　③ 24　　④ 36　　⑤ 42

해설

공식 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에 주어진 수를 대입하여

$(ab+bc+ca)$의 값을 구하면 $(ab+bc+ca)=12$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 에서

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$이므로

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore\ a=b=c=2$이므로 $a^3+b^3+c^3=24$

12. $f(x)=3x^3-x+2$ 일 때, $f(x+1)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$이다. 이 때, $A+B+C+D$의 값을 구하면 ?

① 4　　② 14　　③ 24　　④ 34　　⑤ 44

해설

$f(x+1)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$ 에 $x=1$ 을 대입하면
$f(2)=A+B+C+D$ 이므로
$f(2)$를 구하기 위해서는
$f(x)=3x^3-x+2$ 에 $x=2$ 를 대입하면
$f(2)=3\times2^3-2+2=24$

해설

$x+1=t$ 라 하면,
$f(t)=A(t-1)^3+B(t-1)^2+C(t-1)+D$

1	3	0	−1	2
		3	3	2
1	3	3	2	4
		3	6	
1	3	6	8	
		3		
	3	9		

$\therefore\ A=3,\ B=9,\ C=8,\ D=4$
$\therefore\ A+B+C+D=24$

13. $x^2 - xy + y^2 + 2y = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$　② 1　③ 2　④ $\frac{11}{5}$　⑤ 4

해설

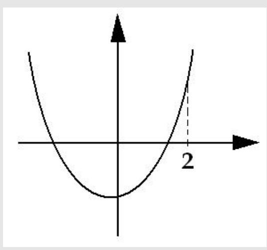
주어진 식을 y 에 대하여 정리하면
$y^2 + (2-x)y + x^2 = 0$
이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.
$D = (2-x)^2 - 4 \cdot x^2 \geq 0$,
$3x^2 + 4x - 4 \leq 0$, $(x+2)(3x-2) \leq 0$
$\therefore -2 \leq x \leq \frac{2}{3}$
따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

14. $x > 2$인 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$을 성립하게 하는 실수 k의 최댓값은?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k < 2$ ⋯⋯㉠

$f(2) = 3 - 3k \geq 0$에서 $k \leq 1$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡에서 $k \leq 1$

k의 최댓값은 1이다.

15. 세 꼭짓점이 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}(4,\ 3)$, $\mathrm{C}(0,\ 1)$인 $\triangle\mathrm{ABC}$ 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$를 $2:3$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\triangle\mathrm{DEF}$ 의 무게중심을 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\triangle\mathrm{ABC}$ 에서 각 변을 $m:n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 무게중심과 일치한다.
$\triangle\mathrm{ABC}$ 의 무게중심은
$\left(\dfrac{-1+4+0}{3},\ \dfrac{-1+3+1}{3}\right)$,
즉 $(1,\ 1)$ 이므로 $\triangle\mathrm{DEF}$ 의 무게중심은 $(1,\ 1)$ 이다.
$\therefore\ a+b=1+1=2$

16. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

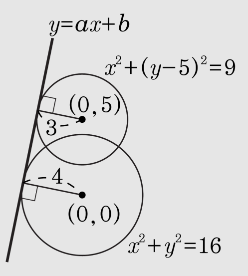
$$x^2 + y^2 = 16,\ \ x^2 + (y-5)^2 = 9$$

① $y = \pm\sqrt{6}x + 10$　　② $y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

③ $y = \pm 3\sqrt{6}x + 30$　　④ $y = \pm 4\sqrt{6}x + 40$

⑤ $y = \pm 5\sqrt{6}x + 50$

해설



$x^2 + y^2 = 16 \cdots\cdots$ ㉠,
$x^2 + (y-5)^2 = 9 \cdots\cdots$ ㉡
공통접선의 방정식을
$y = ax + b \cdots\cdots$ ㉢ 로 놓는다.
이때, 원 ㉠과 직선 ㉢이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

$\therefore |b| = 4\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉣
또, 원 ㉡과 직선 ㉢도 접하므로

$$\frac{|-5+b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 3$$

$\therefore |b-5| = 3\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉤
그런데 $b \neq 0$ 이므로 ㉤ $\div$ ㉣을 하면

$$\frac{|b-5|}{b} = \frac{3}{4}$$

$4|b-5| = 3|b|,\ 4(b-5) = \pm 3b$

$\therefore b = 20$ 또는 $b = \frac{20}{7}$

(i) $b = 20$ 일 때, ㉣에서 $\sqrt{a^2+1} = 5$
$\therefore a = \pm 2\sqrt{6}$

(ii) $b = \frac{20}{7}$ 일 때, ㉣에서
$\sqrt{a^2+1} = \frac{5}{7}$ 이고,
이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(i), (ii) 로부터 $a = \pm 2\sqrt{6}, b = 20$ 이므로
구하는 공통접선의 방정식은
$y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

17. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ \{3,\ 4\},\ \{5,\ 6,\ 7\}\}$, $B = \{0,\ \varnothing,\ \{\varnothing\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.
따라서 $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이고, $n(A) - n(B) = 1$ 이다.

18. 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 짝수$\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

㉠ $X \subset A$	㉡ $2 \in X$	㉢ $n(X) \le 3$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 11 개

해설

$A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$

집합 X는 2를 원소로 갖고 원소의 개수가 3 개 이하인 A의 부분집합이므로

$\{2\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{2, 8\}$, $\{2, 10\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{2, 4, 10\}$, $\{2, 6, 8\}$, $\{2, 6, 10\}$, $\{2, 8, 10\}$의 11 개이다.

19. 전체집합 $U = \left\{x \mid x\text{는 }20\text{이하의 소수}\right\}$ 에 대하여 $A = \{2,\ 7,\ 11\}$, $B = \{3,\ 7,\ 11,\ 17\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A \cap B = \{7,\ 11\}$

② $A \cap B^c = \{2\}$

③ $A^c \cap B = \{3,\ 17\}$

④ $A^c \cup B^c = \{2,\ 3,\ 9,\ 13,\ 17,\ 19\}$

⑤ $A^c \cap B^c = \{5,\ 13,\ 19\}$

해설

$U = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$,
$A = \{2,\ 7,\ 11\}$, $B = \{3,\ 7,\ 11,\ 17\}$
② $A \cap B^c = A - B = \{2\}$
③ $A^c \cap B = B - A = \{3,\ 17\}$
④ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{2,\ 3,\ 5,\ 13,\ 17,\ 19\}$
⑤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5,\ 13,\ 19\}$

20. 두 조건 $p : a-4 < x \le a+5$, $q : |x| \le 1$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \leftarrow q$ 가 참이 되어야 한다. p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $Q \subset P$ 이므로 q : $-1 \le x \le 1$ 에서 $a+5 \ge 1$, $a-4 < -1$
따라서 $a \ge -4$, $a < 3$ 이다.
즉, $-4 \le a < 3$ 이므로 정수 a 의 개수는 7 개이다.

21. $A=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$, $B=\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{x}}}$, $C=\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x=\dfrac{2}{5}$ 일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

① $A>B>C$ ② $A \geq B=C$ ③ $A<B<C$

④ $A \leq B=C$ ⑤ $A=B=C$

해설

$$A=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{5}}}=\frac{1}{1+\frac{5}{2}}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{2}{7}}=\frac{1}{\frac{9}{7}}=\frac{7}{9}$$

$$B=\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+5}}=\frac{1}{\frac{8}{7}}=\frac{7}{8}$$

$$C=\frac{3}{3+\frac{3}{3+\frac{3}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{21}{2}}}=\frac{1}{\frac{23}{21}}=\frac{21}{23}$$

$\therefore\ A=\frac{21}{27},\ B=\frac{21}{24},\ C=\frac{21}{23}$

$\therefore A<B<C$

22. 좌표평면 위의 두 점 A(4, 1), B(1, −2) 와 직선 $y = 2x$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{211}{10}$

해설

점 P 의 좌표를 $(a, 2a)$ 라 하면

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$

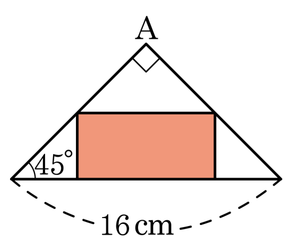
$= (a-4)^2 + (2a-1)^2 + (a-1)^2 + (2a+2)^2$

$= 10a^2 - 6a + 22$

$= 10\left(a - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{211}{10}$

따라서 $a = \frac{3}{10}$ 일 때, 최솟값은 $\frac{211}{10}$ 이다.

23. 빗변의 길이가 16cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 그 넓이의 최댓값은?



① 16cm^2 ② 20cm^2 ③ 24cm^2
④ 28cm^2 ⑤ 32cm^2

해설

세로의 길이를 x , 넓이를 y 라 하면

$y=(16-2x)x=2(-x^2+8x)$

$=-2(x^2-8x+16-16)$

$=-2(x-4)^2+32$

$x=4$ 일 때 최댓값 32

24. 방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$의 근 중에서 실근을 α, β, γ라 하고, 두 허근을 w_1, w_2라 할 때, $\alpha\beta\gamma + w_1 w_2$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

주어진 방정식은 홀수차 상반방정식이므로
$x+1$을 인수로 갖는다.

$\therefore\ (x+1)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = 0,$

$x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0\ (\because\ x \neq 0)$

$\therefore\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$

$\therefore\ x + \frac{1}{x} = 1,\ 3$

(i) $x + \frac{1}{x} = 1$에서 $x^2 - x + 1 = 0$

$\therefore\ w_1 w_2 = 1$

(ii) $x + \frac{1}{x} = 3$에서 $x^2 - 3x + 1 = 0$

$\therefore\ \alpha\beta = 1$

$\therefore\ \alpha\beta\gamma + w_1 w_2 = -1 + 1 = 0\ (\because\ \gamma = -1)$

25. 방정식 $x^5 - 1 = 0$의 한 허근을 α라 할 때, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{2009}}$의 값은?

① -5 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 5

해설

$x^5 - 1$
$= (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$이므로
α는 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$의 근이다.

$\alpha^5 = 1$이면 $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 = 1$이므로

$\frac{1}{\alpha}$도 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$의 근이다.

따라서, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} = 0$

$\therefore\ 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{2009}}$

$= \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) +$

$\frac{1}{\alpha^5}\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) + \cdots$

$+ \frac{1}{\alpha^{2005}}\left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right)$

$= 0$

26. xy 평면 위의 세 개의 직선 $l_1 : x-y+2=0$, $l_2 : x+y-14=0$, $l_3 : 7x-y-10=0$ 으로 둘러싸인 삼각형에 내접하는 원의 중심이 (a, b), 반지름이 r 일 때, $a+b+r^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

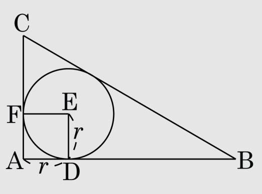
해설

세 직선의 교점을 각각 A, B, C 라 하자. 세 직선 중 두 개의 직선을 각각 연립하여 세 점의 좌표를 구한다.

$\mathrm{A}=(6,8)$ $\mathrm{B}=(2,4)$ $\mathrm{C}=(3,11)$

$\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{BC}}=5\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CA}}=3\sqrt{2}$

즉, $\angle\mathrm{CAB}=90°$ 인 직각 삼각형이다.



$\Rightarrow$ $3\sqrt{2}-r+4\sqrt{2}-r=5\sqrt{2}$ $\therefore$ $r=\sqrt{2}$

$\therefore$ 점 D는 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 $1:3$ 의 내분점이므로,

$\mathrm{D}=\left(\frac{2+18}{4}, \frac{4+24}{4}\right)=(5,7)$

점 F 는 $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 $1:2$ 의 내분점이므로,

$\mathrm{F}=\left(\frac{3+12}{3}, \frac{11+16}{3}\right)=(5,9)$

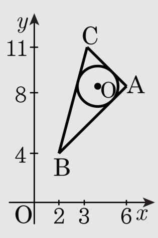
□ADEF 는 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{AF}} \,/\!/\, \overline{\mathrm{DE}}$ 이다.

점 A 에서 점 F 로의 이동이 x 축으로 -1 , y 축으로 $+1$ 만큼 평행이동이고,

점 D 에서 점 E 로 의 이동도 마찬가지이다.

$\therefore$ $\mathrm{E}=(5-1, 7+1)=(4,8) \Rightarrow$ $a+b+r^2=4+8+(\sqrt{2})^2=14$

해설



직선들의 세 교점을 각각 A, B, C 라고 하고 이들의 좌표를 구해보면 $\mathrm{A}(6,8)$, $\mathrm{B}(2,4)$, $\mathrm{C}(3,11)$

원의 중심의 좌표 O(a, b) 이므로

$2<a<6$, $4<b<11 \cdots$ ㉠

원의 중심으로부터 각 직선에 이르는 거리는 같으므로

$\frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|a+b-14|}{\sqrt{2}}=\frac{|7a-b-10|}{5\sqrt{2}}=r \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 ㉠의 조건을 만족시키는 a, b 의 해는 $a=4$, $b=8$ 이고

다시 ㉡에 대입하면, $r=\sqrt{2}$, $\therefore$ $a+b+r^2=14$

27. 집합 $U = \{x|x \le 10,\ x$는 자연수$\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 가 있다. $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = U$ 이고, A 의 모든 원소의 합은 15 일 때, 집합 B 의 모든 원소의 합을 구하여라.

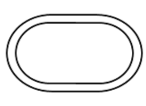
▶ 답:

▷ 정답: 40

해설

$U = \{x|x \le 10,\ x$는 자연수$\} = \{1, 2, 3, \cdots, 10\}$
$A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = U$ 집합 A , B 는 서로소이고, 전체집합 U 의 모든 원소를 나누어 가진다.
전체집합 U 의 모든 원소의 합은 $1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$ 이고, A 의 모든 원소의 합은 15 이므로
집합 B 의 모든 원소의 합은 $55 - 15 = 40$

28. 자동차 경주 코스를 두 자동차 A, B 가 같은 방향으로 돌고 있다.



자동차 A, B 의 속력은 각각 a km/min과 b km/min이고, 경주 코스 한 바퀴의 길이는 c km 이다. $3a-3b=2c$ 가 성립한다고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① 2 분마다 A 는 B 보다 세 바퀴 더 돈다.

② 2 분마다 B 는 A 보다 세 바퀴 더 돈다.

③ 3 분마다 B 는 A 보다 두 바퀴 더 돈다.

④ 3 분마다 A 는 B 보다 한 바퀴 더 돈다.

⑤ 3 분마다 A 는 B 보다 두 바퀴 더 돈다.

해설

$3a$ 는 A 가 3 분 동안 움직인 거리이고
$3b$ 는 B 가 3분 동안 움직인 거리이므로
$3a-3b$ 는 A, B 가 각각 3 분 동안 달렸을 때의 움직인 거리의 차를 뜻한다.
따라서 $3a-3b=2c$ 는 3 분마다 A 는 B 보다 두 바퀴 더 돈다는 뜻이다.

29. $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ 가 성립할 때, $\sqrt{(y-x+1)^2} + 3\sqrt{x^3-y^3-3xy(x-y)} + |x|$ 를 간단히 하면?

① $x+1$　　② $-x+1$　　③ $-x-1$

④ $x-1$　　⑤ 1

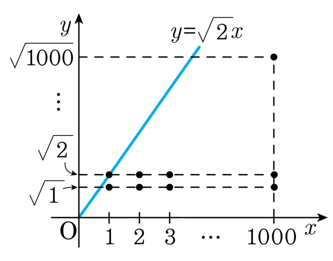
해설

$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ 일 때, $y \geq 0,\ x < 0$

(준식) $= |y-x+1| + 3\sqrt{(x-y)^3} + |x|$

$= y-x+1+x-y-x = -x+1$

30. 평면 위에 좌표가 $(p,\ \sqrt{q})$인 위치에 점들이 찍혀 있다. 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{2}$인 직선을 그을 때, 몇 개의 점들을 통과하는가? (단, $p = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 1000$, $q = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 1000$)



① 20 개　② 21 개　③ 22 개　④ 23 개　⑤ 24 개

해설

$\sqrt{q} = \sqrt{2}p$가 성립하는 자연수 $p,\ q$의 쌍을 구한다.
$1 \le p \le 1000,\ 1 \le q \le 1000,\ q = 2p^2$에서
$1 \le 2p^2 \le 1000$
$\therefore \sqrt{\frac{1}{2}} \le p \le \sqrt{\frac{1000}{2}}$
p는 자연수이므로 $p = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ 22$
따라서, 22 개다.