

1. 다항식 $x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하였을 때, 그 인수들의 합을 구하면?

① $x + 2y + 1$

② $x + y - 3$

③ $2x + 3y + 2$

④ $x + y - 2$

⑤ $2x + 3y - 1$

해설

$$\begin{aligned} & x^2 + 3xy + 2y^2 - x - 3y - 2 \\ &= x^2 + (3y - 1)x + 2y^2 - 3y - 2 \\ &= x^2 + (3y - 1)x + (y - 2)(2y + 1) \\ &= (x + y - 2)(x + 2y + 1) \end{aligned}$$

2. 임의의 실수 x 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 가 다음을 만족할 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하면? $2f(x) - f(-x) = x^2 - 3x + 8$

① $\frac{27}{4}$

② $\frac{29}{4}$

③ $\frac{31}{4}$

④ $\frac{33}{4}$

⑤ $\frac{35}{4}$

해설

$f(x) = ax^2 + bx + c$ 라고 하면

$$2(ax^2 + bx + c) - (ax^2 - bx + c) = x^2 - 3x + 8$$

$$\Rightarrow b = -1, c = 8, a = 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x + 8 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{31}{4}$$

$$\Rightarrow \text{최솟값} : \frac{31}{4}$$

3. 부등식 $|x| + |x - 2| \leq 3$ 을 만족하는 x 의 최솟값을 m , 최댓값을 M 이라고 할 때, $m + M$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

i) $x < 0$ 일 때 $-2x + 2 \leq 3, x \geq -\frac{1}{2}$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x < 0$$

ii) $0 \leq x < 2$ 일 때 $2 \leq 3 \quad \therefore 0 \leq x < 2$

iii) $x \geq 2$ 일 때 $2x - 2 \leq 3, x \leq \frac{5}{2} \quad \therefore 2 \leq x \leq \frac{5}{2}$

i) 또는 ii) 또는 iii)을 만족하는 범위를 구하면

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2} \quad \therefore m + M = 2$$

4. 원 $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 16 = 0$ 에 의하여 잘려지는 x 축 위의 선분의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

x 축을 지나는 점은 $y = 0$ 이므로

$$x^2 + 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow x = -2, -8$$

$\therefore x$ 축 위의 교점 : $(-8, 0), (-2, 0)$

$\therefore$ 구하는 선분의 길이 : 6

5. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + a, y + 4)$ 에 의해 원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 이동하였더니 원점에서 원의 중심까지의 거리가 5 가 되었다. 이 때, 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + a, y + 4)$ 는
 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
4 만큼 평행이동하는 것이므로

원 $x^2 + y^2 = 1$ 을 평행이동하면 원의 중심
 $(0, 0)$ 은 $(a, 4)$ 로 옮겨진다.

이 때, 두 점 $(0, 0)$ 과 $(a, 4)$ 의 거리가 5 이므로

$$\sqrt{a^2 + 4^2} = 5$$

위의 식의 양변을 제곱하면

$$a^2 + 16 = 25, a^2 = 9$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 3$

6. 두 집합 $A = \{2, 4, a^2 - a - 1\}$, $B = \{2, a + 2, a^2 - 2a\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{2, 5\}$ 일 때의 a 값을 구하고 이 때, 집합 A 의 모든 원소의 합을 b 라 하면 다음 중 $a \times b$ 를 맞게 계산한 것은?

① -22

② 15

③ 33

④ 13

⑤ 11

해설

$$A \cap B = \{2, 5\} \text{ 이므로 } a^2 - a - 1 = 5$$

$$a^2 - a - 6 = 0, (a - 3)(a + 2) = 0,$$

$$a = -2 \text{ 또는 } 3$$

$a = -2$ 이면 $B = \{2, 0, 3\}$ 이므로 조건에 어긋난다.

$$\therefore a = 3$$

그리고 $A = \{2, 4, 5\}$ 이므로 원소의 합 $b = 11 \therefore ab = 33$

7. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 $\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 일 때, 다음 중 항상 옳은 것을 모두 고르면?

① $r \Rightarrow p$

② $\sim p \Rightarrow \sim s$

③ $\sim s \Rightarrow \sim r$

④ $r \Rightarrow \sim s$

⑤ $\sim q \Rightarrow s$

해설

$\sim p \Rightarrow \sim q, r \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s$ 의 각각의 대우는 $q \Rightarrow p, \sim q \Rightarrow \sim r, \sim s \Rightarrow \sim r$

따라서 $\sim p \Rightarrow \sim q \Rightarrow \sim r \Rightarrow s, r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이므로 $\sim q \Rightarrow s, r \Rightarrow p$

8. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타낼 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면 ?

보기

- ㉠ n 이 홀수이면 $f(n) = 0$ 이다.
 ㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.
 ㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉡

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서

㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수

$\therefore p = 0$ 즉, $f(n) = 0$

㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$

$\therefore f(8) = f(24)$

㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$

홀수 k 는 무수히 많으므로 n 도 무수히 많다.

9. 함수 $f(x) = 2x + |x|$ 의 역함수를 $g(x) = ax + b|x|$ 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① $\frac{2}{9}$

② $\frac{2}{3}$

③ $-\frac{2}{3}$

④ $\frac{1}{3}$

⑤ $-\frac{4}{3}$

해설

$$f(x) = 2x + |x| = \begin{cases} 3x & (x \geq 0) \\ x & (x < 0) \end{cases} \text{의}$$

역함수를 구한 것이

$$g(x) = \begin{cases} (a+b)x & (x \geq 0) \\ (a-b)x & (x < 0) \end{cases} \text{가 되어야한다.}$$

(i) $x \geq 0$ 일 때, $y = 3x$ 의 역함수를 구하면

$$x = 3y (y \geq 0), \text{ 즉 } y = \frac{x}{3} (x \geq 0)$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{3} \dots\dots\dots \textcircled{㉠}$$

(ii) $x < 0$ 일 때, $y = x$ 의 역함수를 구하면

$$x = y (y < 0), \text{ 즉 } y = x (x < 0)$$

$$\therefore a - b = 1 \dots\dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{2}{3}, b = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore 3ab = -\frac{2}{3}$$

10. 다음 식의 최댓값을 구하면?

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \dots + \frac{1}{(x+9)(x+10)}$$

① $\frac{3}{5}$

② $\frac{2}{5}$

③ $\frac{1}{5}$

④ $-\frac{1}{5}$

⑤ $-\frac{2}{5}$

해설

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \cdots \frac{1}{(x+9)(x+10)} = \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+10}$$

$$\therefore (\text{준식}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} = \frac{x+10-x}{x(x+10)}$$

$$= \frac{10}{x(x+10)} = \frac{10}{(x+5)^2 - 25}$$

$$\therefore \text{최댓값은 } x = -5 \text{ 일 때 } \frac{10}{-25} = -\frac{2}{5}$$

11. 실수 a, b, c 에 대하여 $a + b + c = 6$, $a^2 + b^2 + c^2 = 12$ 를 만족할 때, $a^3 + b^3 + c^3$ 의 값을 구하면?

① 8

② 16

③ 24

④ 36

⑤ 42

해설

공식 $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$ 에 주어진 수를 대입하여

$(ab + bc + ca)$ 의 값을 구하면 $(ab + bc + ca) = 12$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 에서

$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$ 이므로

$$\frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} = 0$$

$\therefore a = b = c = 2$ 이므로 $a^3 + b^3 + c^3 = 24$

12. $f(x) = 3x^3 - x + 2$ 일 때, $f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 이다. 이 때, $A + B + C + D$ 의 값을 구하면 ?

① 4

② 14

③ 24

④ 34

⑤ 44

해설

$f(x+1) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

$f(2) = A + B + C + D$ 이므로

$f(2)$ 를 구하기 위해서는

$f(x) = 3x^3 - x + 2$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$f(2) = 3 \times 2^3 - 2 + 2 = 24$

해설

$x + 1 = t$ 라 하면,

$f(t) = A(t-1)^3 + B(t-1)^2 + C(t-1) + D$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ & & 3 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ & & 3 & 6 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 6 & 8 & \\ & & 3 & \end{array}$$

$$3 \mid 9$$

$\therefore A = 3, B = 9, C = 8, D = 4$

$\therefore A + B + C + D = 24$

13. $x^2 - xy + y^2 + 2y = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$

② 1

③ 2

④ $\frac{11}{5}$

⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$$y^2 + (2-x)y + x^2 = 0$$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$$D = (2-x)^2 - 4 \cdot x^2 \geq 0,$$

$$3x^2 + 4x - 4 \leq 0, \quad (x+2)(3x-2) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

14. $x > 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 2kx + k - 1 > 0$ 을 성립하게 하는 실수 k 의 최댓값은?

① -1

② 0

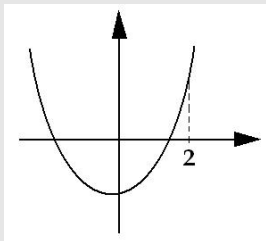
③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$D/4 = k^2 - k + 1 > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 가진다.



문제의 조건을 만족하기 위해서는 대칭축이 2보다 왼쪽에 있어야 하고 $f(2) \geq 0$ 의 두 조건을 모두 만족해야 한다.

대칭축 조건에서 $k < 2$ ㉠

$f(2) = 3 - 3k \geq 0$ 에서 $k \leq 1$ ㉡

㉠, ㉡에서 $k \leq 1$

k 의 최댓값은 1이다.

15. 세 꼭짓점이 $A(-1, -1)$, $B(4, 3)$, $C(0, 1)$ 인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 를 $2 : 3$ 으로 내분하는 점을 각각 D , E , F 라 하자. $\triangle DEF$ 의 무게중심을 (a, b) 라 할 때, $a + b$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 각 변을 $m : n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치한다.

$\triangle ABC$ 의 무게중심은

$$\left(\frac{-1 + 4 + 0}{3}, \frac{-1 + 3 + 1}{3} \right),$$

즉 $(1, 1)$ 이므로 $\triangle DEF$ 의 무게중심은 $(1, 1)$ 이다.

$$\therefore a + b = 1 + 1 = 2$$

16. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$$x^2 + y^2 = 16, \quad x^2 + (y - 5)^2 = 9$$

① $y = \pm \sqrt{6}x + 10$

② $y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

③ $y = \pm 3\sqrt{6}x + 30$

④ $y = \pm 4\sqrt{6}x + 40$

⑤ $y = \pm 5\sqrt{6}x + 50$

해설

$$x^2 + y^2 = 16 \dots\dots \textcircled{㉠},$$

$$x^2 + (y - 5)^2 = 9 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

공통접선의 방정식을

$$y = ax + b \dots\dots \textcircled{㉢} \text{로 놓는다.}$$

이때, 원 ㉠과 직선 ㉢이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

$$\therefore |b| = 4\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{㉣}$$

또, 원 ㉡과 직선 ㉢도 접하므로

$$\frac{|-5 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 3$$

$$\therefore |b - 5| = 3\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{㉤}$$

그런데 $b \neq 0$ 이므로 ㉣ $\div$ ㉤을 하면

$$\frac{|b - 5|}{b} = \frac{3}{4}$$

$$4|b - 5| = 3|b|, \quad 4(b - 5) = \pm 3b$$

$$\therefore b = 20 \text{ 또는 } b = \frac{20}{7}$$

(i) $b = 20$ 일 때, ㉣에서 $\sqrt{a^2 + 1} = 5$

$$\therefore a = \pm 2\sqrt{6}$$

(ii) $b = \frac{20}{7}$ 일 때, ㉤에서

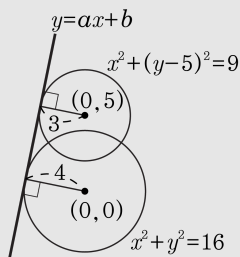
$$\sqrt{a^2 + 1} = \frac{5}{7} \text{ 이고,}$$

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.

(i), (ii)로부터 $a = \pm 2\sqrt{6}, b = 20$ 이므로

구하는 공통접선의 방정식은

$$y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$$



17. 두 집합 $A = \{1, 2, \{3, 4\}, \{5, 6, 7\}\}$, $B = \{0, \emptyset, \{\emptyset\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.

따라서 $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이고, $n(A) - n(B) = 1$ 이다.

18. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$$\textcircled{\neg} X \subset A$$

$$\textcircled{\text{L}} 2 \in X$$

$$\textcircled{\text{E}} n(X) \leq 3$$



답 :

개



정답 : 11 개

해설

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

집합 X 는 2를 원소로 갖고 원소의 개수가 3개 이하인 A 의 부분 집합이므로

$\{2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{2, 10\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 4, 10\}, \{2, 6, 8\}, \{2, 6, 10\}, \{2, 8, 10\}$ 의 11 개이다.

19. 전체집합 $U = \{x|x\text{는 } 20\text{이하의 소수}\}$ 에 대하여 $A = \{2, 7, 11\}$, $B = \{3, 7, 11, 17\}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $A \cap B = \{7, 11\}$

② $A \cap B^c = \{2\}$

③ $A^c \cap B = \{3, 17\}$

④ $A^c \cup B^c = \{2, 3, 9, 13, 17, 19\}$

⑤ $A^c \cap B^c = \{5, 13, 19\}$

해설

$$U = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\},$$

$$A = \{2, 7, 11\}, B = \{3, 7, 11, 17\}$$

$$\textcircled{2} \quad A \cap B^c = A - B = \{2\}$$

$$\textcircled{3} \quad A^c \cap B = B - A = \{3, 17\}$$

$$\textcircled{4} \quad A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{2, 3, 5, 13, 17, 19\}$$

$$\textcircled{5} \quad A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 13, 19\}$$

20. 두 조건 $p : a - 4 < x \leq a + 5$, $q : |x| \leq 1$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 정수 a 의 개수는?

① 6개

② 7개

③ 8개

④ 9개

⑤ 10개

해설

p 가 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \leftarrow q$ 가 참이 되어야 한다. p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면 $Q \subset P$ 이므로 $q : -1 \leq x \leq 1$ 에서 $a + 5 \geq 1$, $a - 4 < -1$ 따라서 $a \geq -4$, $a < 3$ 이다.
즉, $-4 \leq a < 3$ 이므로 정수 a 의 개수는 7 개이다.

21. $A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}$, $B = \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{x}}}$, $C = \frac{3}{3 + \frac{3}{3 + \frac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x = \frac{2}{5}$

일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

① $A > B > C$

② $A \geq B = C$

③ $A < B < C$

④ $A \leq B = C$

⑤ $A = B = C$

해설

$$A = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{2}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{5}{2}} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

$$B = \frac{2}{2 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{\frac{2}{5}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + 5}} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

$$C = \frac{3}{3 + \frac{3}{x}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{3}{x}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{3}{\frac{2}{5}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + 5}} = \frac{1}{\frac{8}{2}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore A = \frac{2}{7}, B = \frac{2}{7}, C = \frac{1}{4}$$

$$\therefore A < B < C$$

22. 좌표평면 위의 두 점 $A(4, 1)$, $B(1, -2)$ 와 직선 $y = 2x$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{211}{10}$

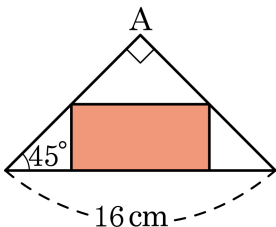
해설

점 P 의 좌표를 $(a, 2a)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 &= (a-4)^2 + (2a-1)^2 + (a-1)^2 + (2a+2)^2 \\ &= 10a^2 - 6a + 22 \\ &= 10\left(a - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{211}{10}\end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{3}{10}$ 일 때, 최솟값은 $\frac{211}{10}$ 이다.

23. 빗변의 길이가 16cm 인 직각이등변삼각형에 그림과 같이 직사각형을 그려 넣을 때, 그 넓이의 최댓값은?



① 16cm^2

② 20cm^2

③ 24cm^2

④ 28cm^2

⑤ 32cm^2

해설

세로의 길이를 x , 넓이를 y 라 하면

$$y = (16 - 2x)x = 2(-x^2 + 8x)$$

$$= -2(x^2 - 8x + 16 - 16)$$

$$= -2(x - 4)^2 + 32$$

$x = 4$ 일 때 최댓값 32

24. 방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 근 중에서 실근을 α, β, γ 라 하고, 두 허근을 w_1, w_2 라 할 때, $\alpha\beta\gamma + w_1w_2$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

주어진 방정식은 홀수차 상반방정식이므로 $x + 1$ 을 인수로 갖는다.

$$\therefore (x + 1)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = 0,$$

$$x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = 0 \quad (\because x \neq 0)$$

$$\therefore \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 1, 3$$

$$(i) \quad x + \frac{1}{x} = 1 \text{ 에서 } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore w_1w_2 = 1$$

$$(ii) \quad x + \frac{1}{x} = 3 \text{ 에서 } x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\therefore \alpha\beta = 1$$

$$\therefore \alpha\beta\gamma + w_1w_2 = -1 + 1 = 0 \quad (\because \gamma = -1)$$

25. 방정식 $x^5 - 1 = 0$ 의 한 허근을 α 라 할 때, $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{2009}}$ 의 값은?

① -5

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 5

해설

$$x^5 - 1$$

$= (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ 이므로

α 는 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이다.

$$\alpha^5 = 1 \text{ 이면 } \left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 = 1 \text{ 이므로}$$

$\frac{1}{\alpha}$ 도 $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 의 근이다.

$$\text{따라서, } 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} = 0$$

$$\therefore 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \cdots + \frac{1}{\alpha^{2009}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) +$$

$$\frac{1}{\alpha^5} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{\alpha^{2005}} \left(1 + \frac{1}{\alpha} + \cdots + \frac{1}{\alpha^4}\right)$$

$$= 0$$

26. xy 평면 위의 세 개의 직선 $l_1 : x - y + 2 = 0, l_2 : x + y - 14 = 0, l_3 : 7x - y - 10 = 0$ 으로 둘러싸인 삼각형에 내접하는 원의 중심이 (a, b) , 반지름이 r 일 때, $a + b + r^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

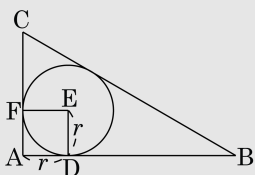
해설

세 직선의 교점을 각각 A, B, C 라 하자. 세 직선 중 두 개의 직선을 각각 연결하여 세 점의 좌표를 구한다.

$$A = (6, 8) \quad B = (2, 4) \quad C = (3, 11)$$

$$\overline{AB} = 4\sqrt{2}, \overline{BC} = 5\sqrt{2}, \overline{CA} = 3\sqrt{2}$$

즉, $\angle CAB = 90^\circ$ 인 직각 삼각형이다.



$$\Rightarrow 3\sqrt{2} - r + 4\sqrt{2} - r = 5\sqrt{2} \therefore r = \sqrt{2}$$

$\therefore$ 점 D는 $\overline{AB}$ 의 1 : 3 의 내분점이므로,

$$D = \left(\frac{2+18}{4}, \frac{4+24}{4} \right) = (5, 7)$$

점 F 는 $\overline{AC}$ 의 1 : 2 의 내분점이므로,

$$F = \left(\frac{3+12}{3}, \frac{11+16}{3} \right) = (5, 9)$$

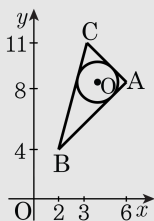
$\square ADEF$ 는 정사각형이므로 $\overline{AF} \parallel \overline{DE}$ 이다.

점 A 에서 점 F 로의 이동이 x 축으로 -1 , y 축으로 $+1$ 만큼 평행이동이고,

점 D 에서 점 E 로 의 이동도 마찬가지이다.

$$\therefore E = (5-1, 7+1) = (4, 8) \Rightarrow a+b+r^2 = 4+8+(\sqrt{2})^2 = 14$$

해설



직선들의 세 교점을 각각 A, B, C 라고 하고 이들의 좌표를 구해보면 $A(6, 8), B(2, 4), C(3, 11)$

원의 중심의 좌표 $O(a, b)$ 이므로

$$2 < a < 6, 4 < b < 11 \cdots \textcircled{1}$$

원의 중심으로부터 각 직선에 이르는 거리는 같으므로

$$\frac{|a-b+2|}{\sqrt{2}} = \frac{|a+b-14|}{\sqrt{2}} = \frac{|7a-b-10|}{5\sqrt{2}} = r \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $\textcircled{1}$ 의 조건을 만족시키는 a, b 의 해는 $a = 4, b = 8$ 이고

$$\text{다시 } \textcircled{2} \text{ 에 대입하면, } r = \sqrt{2}, \therefore a+b+r^2 = 14$$

27. 집합 $U = \{x|x \leq 10, x \text{는 자연수}\}$ 의 두 부분집합 A, B 가 있다.
 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = U$ 이고, A 의 모든 원소의 합은 15 일 때, 집합 B 의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

$$U = \{x|x \leq 10, x \text{는 자연수}\} = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$$

$A \cap B = \emptyset, A \cup B = U$ 집합 A, B 는 서로소이고, 전체집합 U 의 모든 원소를 나누어 가진다.

전체집합 U 의 모든 원소의 합은 $1 + 2 + 3 + \dots + 10 = 55$ 이고,
 A 의 모든 원소의 합은 15 이므로

$$\text{집합 } B \text{ 의 모든 원소의 합은 } 55 - 15 = 40$$

28. 자동차 경주 코스를 두 자동차 A, B 가 같은 방향으로 돌고 있다.



자동차 A, B 의 속력은 각각 a km/min 과 b km/min 이고, 경주 코스 한 바퀴의 길이는 c km 이다. $3a - 3b = 2c$ 가 성립한다고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① 2 분마다 A 는 B 보다 세 바퀴 더 돈다.
- ② 2 분마다 B 는 A 보다 세 바퀴 더 돈다.
- ③ 3 분마다 B 는 A 보다 두 바퀴 더 돈다.
- ④ 3 분마다 A 는 B 보다 한 바퀴 더 돈다.
- ⑤ 3 분마다 A 는 B 보다 두 바퀴 더 돈다.

해설

$3a$ 는 A 가 3 분 동안 움직인 거리이고

$3b$ 는 B 가 3 분 동안 움직인 거리이므로

$3a - 3b$ 는 A, B 가 각각 3 분 동안 달렸을 때의 움직인 거리의 차를 뜻한다.

따라서 $3a - 3b = 2c$ 는 3 분마다 A 는 B 보다 두 바퀴 더 돈다는 뜻이다.

29. $\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ 가 성립할 때, $\sqrt{(y-x+1)^2} + 3\sqrt{x^3-y^3-3xy(x-y)} + |x|$ 를 간단히 하면?

① $x+1$

② $-x+1$

③ $-x-1$

④ $x-1$

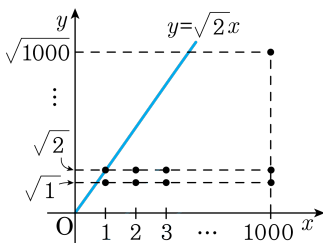
⑤ 1

해설

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = -\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ 일 때, } y \geq 0, x < 0$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= |y-x+1| + 3\sqrt{(x-y)^3} + |x| \\ &= y-x+1 + x-y-x = -x+1 \end{aligned}$$

30. 평면 위에 좌표가 $(p, \sqrt{q})$ 인 위치에 점들이 찍혀 있다. 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{2}$ 인 직선을 그을 때, 몇 개의 점들을 통과하는가?
(단, $p = 1, 2, 3, \dots, 1000, q = 1, 2, 3, \dots, 1000$)



① 20 개

② 21 개

③ 22 개

④ 23 개

⑤ 24 개

해설

$\sqrt{q} = \sqrt{2}p$ 가 성립하는 자연수 p, q 의 쌍을 구한다.

$1 \leq p \leq 1000, 1 \leq q \leq 1000, q = 2p^2$ 에서

$1 \leq 2p^2 \leq 1000$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{2}} \leq p \leq \sqrt{\frac{1000}{2}}$$

p 는 자연수이므로 $p = 1, 2, 3, \dots, 22$

따라서, 22 개다.