

1. 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$ 의 값은?

① -5

② -4

③ -1

④ 1

⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계를 이용하면,

$$\alpha + \beta = -3 \quad \alpha\beta = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 &= \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} \\ &= -3 + 2 = -1 \end{aligned}$$

2. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -19

해설

$$y = x^2 - 6x - 10 = (x - 3)^2 - 19$$

$x = 3$ 일 때, 최솟값은 -19 이다.

3. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{cases} x-y=1 & \cdots \textcircled{A} \\ x^2+y^2=5 & \cdots \textcircled{B} \end{cases}$$

①에서 $x=y+1$ 을 ②에 대입하면,

$$(y+1)^2+y^2=5$$

$$y^2+y-2=0$$

$$(y+2)(y-1)=0$$

$$\therefore y=-2 \text{ 또는 } y=1$$

$$y=-2 \text{ 를 } \textcircled{A} \text{ 에 대입하면 } x=-1$$

$$y=1 \text{ 을 } \textcircled{A} \text{ 에 대입하면 } x=2$$

$$\therefore xy=2$$

4. 두 원 O와 O'의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

- ① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

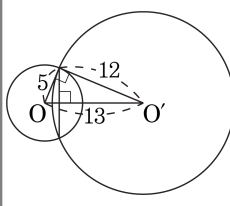
해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면

$\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore x = \frac{120}{13}$$



5. 다음 중 집합 A, B 사이의 관계가 $A \subset B$ 인 것은?

- ① $A = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{의 약수}\},$
 $B = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$
- ② $A = \{x \mid x \text{는 } 45 \text{의 약수}\},$
 $B = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{의 약수}\}$
- ③ $A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{의 배수}\},$
 $B = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{의 배수}\}$
- ④ $A = \{x \mid x \text{는 } 56 \text{의 약수}\},$
 $B = \{x \mid x \text{는 } 7 \text{의 배수}\}$
- ⑤ $A = \{x \mid x \text{는 } 60 \text{의 약수}\},$
 $B = \{x \mid x \text{는 } 30 \text{의 배수}\}$

해설

- ① $A = \{1, 2, 4, 8\},$
 $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\} \Rightarrow A \subset B$
- ② $A = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\},$
 $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100\}$
 $\Rightarrow A \cap B = \{1, 5\}$
- ③ $A = \{4, 8, 12, 16, 20, \dots\},$
 $B = \{15, 30, 45, 60, \dots\}$
 $\Rightarrow A \cap B = \{60, 120, 180, \dots\}$
- ④ $A = \{1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56\},$
 $B = \{7, 14, 21, 28, \dots\} \Rightarrow A \not\subset B$
- ⑤ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$
 $B = \{30, 60, 90, \dots\} \Rightarrow A \cap B = \{30, 60\}$

6. 전체집합 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 A 가 다음 두 조건을 동시에 만족할 때, 집합 A 의 개수를 구하면?

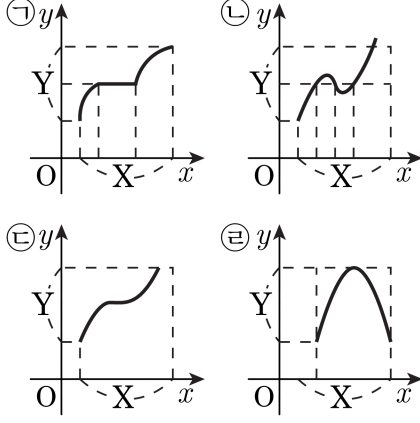
I. $\{1, 2\} \subset A$
II. $5 \notin A$

- ① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

1, 2, 5를 제외시키고 계산을 해야 하므로
 $2^{6-3} = 8(\text{개})$

7. 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?



- ① (㉠) (ㄱ)
 ② (㉡) (ㄹ)
 ③ (㉢) (ㄷ)
- ④ (㉣)
 ⑤ (㉣) (ㄴ) (ㄷ)

해설

X 에서 Y 로의 일대일 대응을 찾으면 된다.

㉠

㉡

㉠ $\{x|a \leq x \leq b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일 대응이 아니다.

㉡ a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.

㉢, ㉣의 경우와 같다.

8. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 f, g, h 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

- ㉠ $f \circ g = g \circ f$
- ㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- ㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$
- ㉤ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

- ① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉤ ③ ㉢, ㉤
- ④ ㉠, ㉡, ㉤ ⑤ ㉡, ㉢, ㉤

해설

- ㉠ 일반적으로 함수의 합성에서 교환법칙은 성립하지 않는다.
 $\therefore$ 옳지 않다.
- ㉡ 함수의 합성에서 결합법칙은 성립한다.
 $\therefore$ 옳다.
- ㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1}$
 $= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$
 $= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
 $\therefore$ 옳지 않다.
- ㉤ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
 $f \circ g = I$ 에서 $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
 $\therefore g = f^{-1} \therefore$ 옳다.

9. 세 다항식 $A = x^2 + 3x - 2$, $B = 3x^2 - 2x + 1$, $C = 4x^2 + 2x - 3$ 에 대하여

$3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B$ 를 간단히 하면?

- ① $3x^2 + 12x - 13$ ② $-3x^2 + 24x + 21$
③ $3x^2 - 12x + 21$ ④ $-3x^2 - 24x + 21$
⑤ $x^2 + 12x + 11$

해설

$$\begin{aligned} & 3A - \{5A - (3B - 4C)\} + 2B \\ &= -2A + 5B - 4C \\ &= -2(x^2 + 3x - 2) + 5(3x^2 - 2x + 1) - 4(4x^2 + 2x - 3) \\ &= -3x^2 - 24x + 21 \end{aligned}$$

10. 다항식 $f(x)$ 를 $x+1$ 로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 이라고 할 때, $xf(x)-3$ 을 $x+1$ 로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$

② $xQ(x), -R+3$

③ $xQ(x), -R-6$

④ $xQ(x)+R, -R-3$

⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$$f(x) = (x+1)Q(x) + R$$

$$\therefore xf(x) = x(x+1)Q(x) + xR$$

$$\therefore xf(x) - 3 = x(x+1)Q(x) + xR - 3$$

$$= (x+1) \{xQ(x)\} + (x+1)R - R - 3$$

$$= (x+1) \{xQ(x) + R\} - R - 3$$

11. 이차방정식 $x^2 - 2kx + 9 = 0$ 의 두 근의 비가 1 : 3이 되도록 상수 k 의 값을 구하면?

① $\pm 2\sqrt{2}$

② $\pm 2\sqrt{3}$

③ $\pm 2\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{6}$

⑤ ± 2

해설

한 근을 α 라 하면 다른 한 근은 3α

$\therefore$ 두 근의 곱은 $3\alpha^2 = 9 \quad \therefore \alpha = \pm\sqrt{3}$

두 근의 합은 $\alpha + 3\alpha = \pm 4\sqrt{3} = 2k$

$\therefore k = \pm 2\sqrt{3}$

12. 직선 $y = ax + 1$ 이 이차함수 $y = x^2 - 3x + 5$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y = x^2 + 3x + 5$ 의 그래프와는 만나지 않을 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < -7$ 또는 $a > 1$ ② $-1 < a < 7$

③ $a < 7$ ④ $-7 < a < 1$

⑤ $1 < a < 7$

해설

$ax + 1 = x^2 - 3x + 5$ 에서 $x^2 - (a + 3)x + 4 = 0$
서로 다른 두 점에서 만나므로

$$D = (a + 3)^2 - 4 \cdot 4 > 0$$

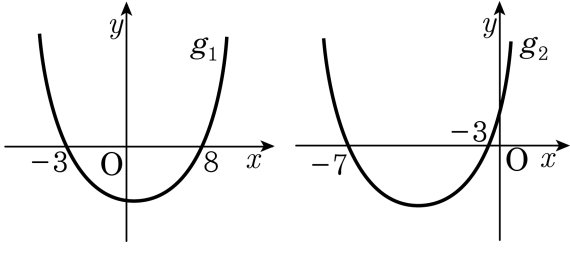
$$a < -7 \text{ 또는 } a > 1 \cdots \textcircled{㉠}$$

$ax + 1 = x^2 + 3x + 5$ 에서 $x^2 + (3 - a)x + 4 = 0$
만나지 않으므로 $D = (3 - a)^2 - 4 \cdot 4 < 0$

$$-1 < a < 7 \cdots \textcircled{㉡}$$

$\therefore \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 의 공통범위는 $1 < a < 7$

13. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로
 g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)
 을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로
 g_2 의 일차항 $a = 10$
 ($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)
 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면
 $x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x + 12)(x - 2) < 0$
 $\therefore -12 < x < 2$
 따라서 만족하는 정수는 13 (개)

14. 두 원 $\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 4 \\ (x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2 \end{cases}$ 이 만나도록 하는 양의 정수 r 의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

두 원의 중심간 거리는
 $\sqrt{(2-(-1))^2 + (3-(-1))^2} = 5$ 이다.
 $|r-2| \leq 5 \leq |r+2|$
따라서 두 원이 만나기 위해서는 r 이 3, 4, 5, 6, 7중 하나의 값이어야 한다.

15. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0, \quad 3x - 4y + 6 = 0$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$
따라서 , 원의 중심 $(1, -2)$ 에서 직선
 $3x - 4y + 6 = 0$ 까지의 거리 d 는
$$d = \frac{|17|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5} > 2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.
∴ 교점의 개수 : 0개

16. 점 A(1, 2)를 직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

점 A(1, 2)를 직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 B(a , b)라 하면,

$\overline{AB}$ 의 중점 $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}\right)$ 가

직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 위에 있으므로

$$4 \cdot \frac{1+a}{2} - 2 \cdot \frac{2+b}{2} - 5 = 0$$

$$\therefore 2a - b = 5 \cdots \textcircled{1}$$

또한, 직선 AB와 직선 $4x - 2y - 5 = 0$ 이

$$\text{수직이므로 } \frac{b-2}{a-1} \times 2 = -1$$

$$\therefore a + 2b = 5 \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = 1$

$$\therefore B(3, 1)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$$

17. 집합 $B = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 미만의 } 5 \text{의 배수}\}$ 의 부분집합 중에서 원소 5를 가지는 부분집합은 몇 개인가?

① 0 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 10 개

해설

집합 $B = \{5, 10, 15\}$

원소 5를 가지는 부분집합의 개수는 $\{10, 15\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.

$\therefore 2^2 = 4$ (개)

18. 모든 모서리의 길이의 합이 60 이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$ 인 직육면체의 겉넓이는?

① 88 ② 100 ③ 124 ④ 148 ⑤ 160

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 x, y, z 라고 하면

$$4(x + y + z) = 60 \text{ 에서 } x + y + z = 15$$

또, 대각선의 길이는

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{77} \text{ 이므로}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 77$$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy + yz + zx)$ 이고

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \text{ 이므로}$$

$$77 = 15^2 - 2(xy + yz + zx)$$

$$\therefore 2(xy + yz + zx) = 225 - 77 = 148$$

따라서, 직육면체의 겉넓이는 148 이다.

19. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $p < x < q$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해를 p, q 를 써서 나타내면? (단, $p > 0$)

① $x > q$ 또는 $x < p$

② $\frac{1}{q} < x < \frac{1}{p}$

③ $x > \frac{1}{p}$

④ $x < \frac{1}{q}$

⑤ $x > \frac{1}{p}$ 또는 $x < \frac{1}{q}$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $p < x < q$ 라면

$(a < 0$ 이므로) $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0$

$\Leftrightarrow (x-p)(x-q) < 0$, $x - (p+q)x + pq < 0$

$p+q = -\frac{b}{a}$, $pq = \frac{c}{a}$

$cx^2 + bx + a < 0$ 에서 양변을 a 로 나누면

$\frac{c}{a}x^2 + \frac{b}{a}x + 1 > 0$ ($\because a < 0$)

$\Leftrightarrow pqx^2 - (p+q)x + 1 > 0$

$\Leftrightarrow (px-1)(qx-1) > 0$

$\therefore x > \frac{1}{p}$ 또는 $x < \frac{1}{q}$

$\left(\because \frac{1}{p} > \frac{1}{q} \right)$

20. 이차방정식 $x^2 - 4x + 4a = 0$ (a 는 실수) 이 허근을 가질 때, $a - 1 + \frac{9}{a - 1}$ 의 최솟값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2 - 4x + 4a = 0$ 이 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = 4 - 4a < 0$$

$$\therefore a > 1$$

$$\therefore (a - 1) + \frac{9}{(a - 1)} \geq 2\sqrt{(a - 1) \cdot \frac{9}{(a - 1)}} = 6$$

따라서 최솟값은 6

21. 두 함수 $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} g^{-1}(x) &= x^2 \text{ 이므로} \\ (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2) \\ &= (g^{-1} \circ f)(2) \\ &= g^{-1}(f(2)) \\ &= g^{-1}(3) \\ &= 9 \end{aligned}$$

22. $x = \sqrt{7 - \sqrt{48}}$ 일 때, $x^5 + \frac{1}{x^5}$ 의 값을 구하면?

① 36

② 98

③ 448

④ 724

⑤ 1024

해설

$$x = \sqrt{7 - \sqrt{48}} = \sqrt{7 - 2\sqrt{12}}$$

$$= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore x + \frac{1}{x} = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$$

$$= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

$$x^2 + \frac{1^2}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$x^3 + \frac{1^3}{x} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 64 - 12 = 52$$

$$\text{따라서, } x^5 + \frac{1}{x^5}$$

$$= \left(x^2 + \frac{1^2}{x}\right)\left(x^3 + \frac{1^3}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 14 \times 52 - 4 = 724$$

23. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $(x-1) : (y-3) : (z+2) = 2 : 1 : 3$ 일 때, $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설

$(x-1) : (y-3) : (z+2) = 2 : 1 : 3$ 이므로

$x-1 = 2k$ 에서 $x = 2k + 1$

$y-3 = k$ 에서 $y = k + 3$

$z+2 = 3k$ 에서 $z = 3k - 2$

$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2$ 에 대입하면

$(k-2)^2 + (-2k+5)^2 + (k-3)^2$

$= 6k^2 - 30k + 38$

$= 6\left(k - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

따라서 $k = \frac{5}{2}$ 일 때, 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 이다.

24. 집합 {1, 2, 3, ..., 100}의 부분집합 중에는 어떤 원소도 다른 원소의 3배가 아닌 수들로만 이루어진 것이 있다. 이와 같은 부분집합의 원소의 개수의 최댓값은?

- ① 50개 ② 66개 ③ 67개 ④ 76개 ⑤ 78개

해설

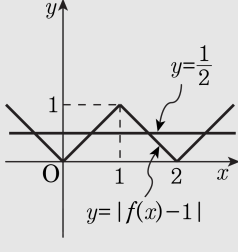
문제의 조건을 만족하는 부분집합을 A 라 하자. 어떤 양의 정수 $b(\leq 100)$ 가 A 에 속한다면 $3b$ 는 A 에 속할 수 없다. $3b$ 가 A 에 속하지 않으므로, 이것의 3 배수인 $9b$ 는 A 에 속하여도 된다. 그러나 다시 이것의 3 배수인 $27b$ 는 A 에 속할 수 없다. 또, $27b$ 가 A 에 속하지 않으므로 이것의 3 배수인 $81b$ 는 A 에 속한다. 이 과정을 간단히 알아보면 $b \in A \rightarrow 3b \notin A \rightarrow 9b \in A \rightarrow 27b \notin A \rightarrow 81b \in A$ 와 같이 된다. 결국 A 의 원소의 개수가 가장 많은 경우 1 부터 100 까지의 정수에서 3 의 배수는 제외하고, 9 의 배수 중에서 27 의 배수는 제외시키고, 81 의 배수는 포함시킨다. 1 부터 100 까지의 정수에서 3 의 배수가 아닌 것은 $100 - 33 = 67$ (개), 9 의 배수 중에서 27 의 배수가 아닌 것은 $11 - 3 = 8$ (개), 81 의 배수는 1 (개). 따라서 구하는 최댓값은 $67 + 8 + 1 = 76$

25. 함수 $f(x) = |x - 1|$ 에 대하여 $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수를 구하면?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$(f \circ f)(x) = |f(x) - 1|$ 이므로
 $y = |f(x) - 1|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = |f(x) - 1|$ 의 그래프와
직선 $y = \frac{1}{2}$ 이 4개의 점에서
만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 4개이다.