1. 이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ 의 값은?

① -5 ② -4 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

근과 계수와의 관계를 이용하면,

$\alpha+\beta=-3 \quad \alpha\beta=1$

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=-3+2=-1$

2. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 10$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -19

해설

$y = x^2 - 6x - 10 = (x-3)^2 - 19$

$x = 3$ 일 때, 최솟값은 -19 이다.

3. $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$ 에서 xy의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\begin{cases} x-y=1 & \cdots ㉠ \\ x^2+y^2=5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=y+1$을 ㉡에 대입하면,

$(y+1)^2+y^2=5$

$y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$

$\therefore\ y=-2$ 또는 $y=1$

$y=-2$를 ㉠에 대입하면 $x=-1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=2$

$\therefore\ xy=2$

4. 두 원 O와 O′ 의 반지름의 길이가 각각 5 cm, 12 cm 이고 중심거리가 13 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이는?

① $\frac{60}{13}$ ② $\frac{90}{13}$ ③ $\frac{120}{13}$ ④ $\frac{150}{13}$ ⑤ $\frac{180}{13}$

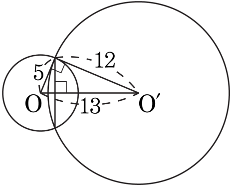
해설

다음 그림처럼 공통현의 길이를 x 라 하면

$\triangle OO'A$ 는 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 \times \frac{x}{2}$$

$$\therefore \ x = \frac{120}{13}$$



5. 다음 중 집합 A, B 사이의 관계가 $A \subset B$ 인 것은?

① $A = \{x \mid x$는 8의 약수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 24의 약수$\}$

② $A = \{x \mid x$는 45의 약수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 100의 약수$\}$

③ $A = \{x \mid x$는 4의 배수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 15의 배수$\}$

④ $A = \{x \mid x$는 56의 약수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 7의 배수$\}$

⑤ $A = \{x \mid x$는 60의 약수$\}$,
$B = \{x \mid x$는 30의 배수$\}$

해설

① $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$,
$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\} \ \Rightarrow\ A \subset B$

② $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 45\}$,
$B = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20,\ 25,\ 50,\ 100\}$
$\Rightarrow\ A \cap B = \{1,\ 5\}$

③ $A = \{4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 20,\ \cdots\}$,
$B = \{15,\ 30,\ 45,\ 60,\ \cdots\}$
$\Rightarrow\ A \cap B = \{60,\ 120,\ 180,\ \cdots\}$

④ $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 8,\ 14,\ 28,\ 56\}$,
$B = \{7,\ 14,\ 21,\ 28,\ \cdots\} \ \Rightarrow\ A \not\subset B$

⑤ $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 20,\ 30,\ 60\}$
$B = \{30,\ 60,\ 90,\ \cdots\} \ \Rightarrow\ A \cap B = \{30,\ 60\}$

6. 전체집합 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 의 부분집합 A 가 다음 두 조건을 동시에 만족할 때, 집합 A 의 개수를 구하면?

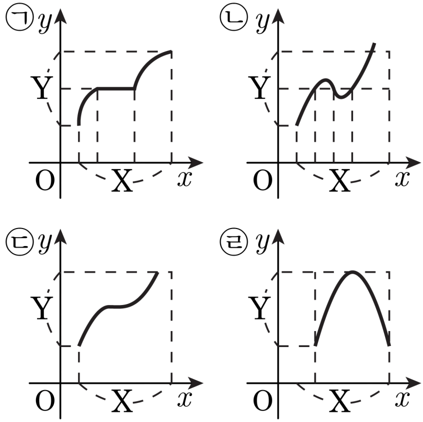
Ⅰ. $\{1,\ 2\} \subset A$ Ⅱ. $5 \notin A$

① 2개 ② 4개 ③ 8개 ④ 16개 ⑤ 32개

해설

1, 2, 5를 제외시키고 계산을 해야 하므로
$2^{6-3} = 8$(개)

7. 함수 $f : X \to Y$의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?

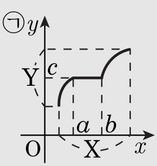


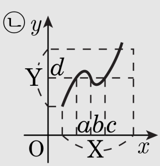
① (ㄱ) (ㄷ) ② (ㄴ) (ㄹ) ③ (ㄷ)

④ (ㄱ) ⑤ (ㄱ) (ㄴ) (ㄹ)

해설

X에서 Y로의 일대일 대응을 찾으면 된다.





㉠ $\{x|a \leq x \leq b\}$에 속하는
x의 상이 모두 c이므로
일대일 대응이 아니다.
㉡ a, b, c의 상이 모두 d이므로
일대일 대응이 아니다.
㉣, ㉡의 경우와 같다.

8. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 f, g, h 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

㉠ $f \circ g = g \circ f$

㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$

㉣ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ 일반적으로 함수의 합성에서
교환법칙은 성립하지 않는다.
$\therefore$ 옳지 않다.

㉡ 함수의합성에서 결합법칙은 성립한다.
$\therefore$ 옳다.

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1}$
$= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$
$= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$

$\therefore$ 옳지 않다.

㉣ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
$f \circ g = I$ 에서$f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
$\therefore\ g = f^{-1}$ $\therefore$ 옳다.

9. 세 다항식 $A=x^2+3x-2,\ B=3x^2-2x+1,\ C=4x^2+2x-3$ 에 대하여
$3A-\{5A-(3B-4C)\}+2B$를 간단히 하면?

① $3x^2+12x-13$
② $-3x^2+24x+21$
③ $3x^2-12x+21$
④ $-3x^2-24x+21$
⑤ $x^2+12x+11$

해설

$$3A-\{5A-(3B-4C)\}+2B$$
$$=-2A+5B-4C$$
$$=-2(x^2+3x-2)+5(3x^2-2x+1)-4(4x^2+2x-3)$$
$$=-3x^2-24x+21$$

10. 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, $xf(x)-3$을 $x+1$로 나눈 몫과 나머지는?

① $xQ(x), -R-3$

② $xQ(x), -R+3$

③ $xQ(x), -R-6$

④ $xQ(x)+R, -R-3$

⑤ $xQ(x)+R, -R+3$

해설

$$f(x)=(x+1)Q(x)+R$$

$$\therefore\ xf(x)=x(x+1)Q(x)+xR$$

$$\begin{aligned}\therefore\ xf(x)-3&=x(x+1)Q(x)+xR-3\\&=(x+1)\left\{xQ(x)\right\}+(x+1)R-R-3\\&=(x+1)\left\{xQ(x)+R\right\}-R-3\end{aligned}$$

11. 이차방정식 $x^2 - 2kx + 9 = 0$의 두 근의 비가 $1 : 3$이 되도록 상수 k의 값을 구하면?

① $\pm 2\sqrt{2}$ ② $\pm 2\sqrt{3}$ ③ $\pm 2\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{6}$ ⑤ ± 2

해설

한 근을 α라 하면 다른 한 근은 3α

$\therefore$ 두 근의 곱은 $3\alpha^2 = 9$ $\therefore \alpha = \pm\sqrt{3}$

두 근의 합은 $\alpha + 3\alpha = \pm 4\sqrt{3} = 2k$

$\therefore$ $k = \pm 2\sqrt{3}$

12. 직선 $y=ax+1$이 이차함수 $y=x^2-3x+5$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나고, 이차함수 $y=x^2+3x+5$의 그래프와는 만나지 않을 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a<-7$ 또는 $a>1$

② $-1<a<7$

③ $a<7$

④ $-7<a<1$

⑤ $1<a<7$

해설

$ax+1=x^2-3x+5$에서 $x^2-(a+3)x+4=0$

서로 다른 두 점에서 만나므로

$D=(a+3)^2-4\cdot 4>0$

$a<-7$ 또는 $a>1\cdots$㉠

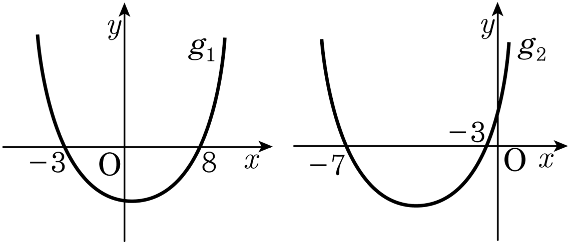
$ax+1=x^2+3x+5$에서 $x^2+(3-a)x+4=0$

만나지 않으므로 $D=(3-a)^2-4\cdot 4<0$

$-1<a<7\cdots$㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡의 공통범위는 $1<a<7$

13. 이차함수 $y = x^2 + ax + b$ 를 갑은 일차항의 계수를 잘못 보고 그래프 g_1 을, 을은 상수항을 잘못 보고 그래프 g_2 를 그렸다. 이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 을 만족하는 정수 x 의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 13 개

해설

갑은 상수항을 바르게 보았으므로

g_1 의 상수항 $b = -24$ ($\because$ 두 근의 곱)

을은 일차항의 계수를 바르게 보았으므로

g_2 의 일차항 $a = 10$

($\because$ 대칭축의 방정식은 $x = -\frac{a}{2} = -5$)

이 때, $x^2 + ax + b < 0$ 에 a, b 를 대입하면

$x^2 + 10x - 24 < 0$, $(x + 12)(x - 2) < 0$

$\therefore -12 < x < 2$

따라서 만족하는 정수는 13 (개)

14. 두 원 $\begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=4 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=r^2 \end{cases}$ 이 만나도록 하는 양의 정수 r의 개수는?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

두 원의 중심간 거리는
$\sqrt{(2-(-1))^2+(3-(-1))^2}=5$이다.
$|r-2| \le 5 \le |r+2|$
따라서 두 원이 만나기 위해서는 r이 3, 4, 5, 6, 7중 하나의 값이어야 한다.

15. 다음 원과 직선의 교점의 개수를 구하여라.

$x^2+y^2-2x+4y+1=0, \quad 3x-4y+6=0$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 0 개

해설

원의 방정식을 표준형으로 나타내면

$(x-1)^2+(y+2)^2=2^2$

따라서 , 원의 중심 $(1,-2)$ 에서 직선

$3x-4y+6=0$ 까지의 거리 d 는

$$d=\frac{|17|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{17}{5}$$

이때, $\frac{17}{5}>2$ 이므로 원과 직선은 만나지 않는다.

$\therefore$ 교점의 개수 : 0 개

16. 점 A(1, 2)를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{5}$

해설

점 A(1, 2)를 직선 $4x-2y-5=0$에 대하여 대칭이동한 점을 B$(a,\ b)$라 하면,

$\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{2+b}{2}\right)$가

직선 $4x-2y-5=0$ 위에 있으므로

$$4\cdot\frac{1+a}{2}-2\cdot\frac{2+b}{2}-5=0$$

$\therefore\ 2a-b=5\ \cdots$ ㉠

또한, 직선 AB와 직선 $4x-2y-5=0$이

수직이므로 $\frac{b-2}{a-1}\times 2=-1$

$\therefore\ a+2b=5\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=1$

$\therefore$ B(3, 1)

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(3-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{5}$

17. 집합 $B=\{x\mid x$는 20 미만의 5의 배수$\}$ 의 부분집합 중에서 원소 5 를 가지는 부분집합은 몇 개인가?

① 0 개 ② 4 개 ③ 6 개 ④ 8 개 ⑤ 10 개

해설

집합 $B=\{5,\ 10,\ 15\}$
원소 5 를 가지는 부분집합의 개수는 $\{10,\ 15\}$ 의 부분집합의 개수와 같다.
$\therefore\ 2^2=4$ (개)

18. 모든 모서리의 길이의 합이 60이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$인 직육면체의 겉넓이는?

① 88　② 100　③ 124　④ 148　⑤ 160

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라고 하면

$4(x+y+z)=60$에서 $x+y+z=15$

또, 대각선의 길이는

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{77}$이므로

$x^2+y^2+z^2=77$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이고

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$77=15^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=225-77=148$

따라서, 직육면체의 겉넓이는 148이다.

19. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $p<x<q$일 때, 이차부등식 $cx^2+bx+a<0$의 해를 p, q를 써서 나타내면? (단, $p>0$)

① $x>q$ 또는 $x<p$

② $\frac{1}{q}<x<\frac{1}{p}$

③ $x>\frac{1}{p}$

④ $x<\frac{1}{q}$

⑤ $x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $p<x<q$ 라면

($a<0$ 이므로) $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0$

$\Leftrightarrow (x-p)(x-q)<0$, $x-(p+q)x+pq<0$

$p+q=-\frac{b}{a},\ pq=\frac{c}{a}$

$cx^2+bx+a<0$ 에서 양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2+\frac{b}{a}x+1>0$ $(\because a<0)$

$\Leftrightarrow pqx^2-(p+q)x+1>0$

$\Leftrightarrow (px-1)(qx-1)>0$

$\therefore x>\frac{1}{p}$ 또는 $x<\frac{1}{q}$

$\left(\because \frac{1}{p}>\frac{1}{q}\right)$

20. 이차방정식 $x^2-4x+4a=0$ (a는 실수) 이 허근을 가질 때, $a-1+\dfrac{9}{a-1}$의 최솟값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2-4x+4a=0$이 허근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=4-4a<0$$

$$\therefore a>1$$

$$\therefore (a-1)+\frac{9}{(a-1)} \geq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{9}{(a-1)}}=6$$

따라서 최솟값은 6

21. 두 함수 $f(x) = x + 1,\ g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 9

해설

$g^{-1}(x) = x^2$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2)\\ &= (g^{-1} \circ f)(2)\\ &= g^{-1}(f(2))\\ &= g^{-1}(3)\\ &= 9\end{aligned}$$

22. $x = \sqrt{7-\sqrt{48}}$ 일 때, $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$ 의 값을 구하면?

① 36　　② 98　　③ 448　　④ 724　　⑤ 1024

해설

$$x = \sqrt{7-\sqrt{48}} = \sqrt{7-2\sqrt{12}}$$

$$= \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\therefore \quad x + \frac{1}{x} = 2 - \sqrt{3} + \frac{1}{2-\sqrt{3}}$$

$$= 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4$$

$$x^2 + \frac{1}{x}^{2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 16 - 2 = 14$$

$$x^3 + \frac{1}{x}^{3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 64 - 12 = 52$$

따라서, $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x}^{2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x}^{3}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= 14 \times 52 - 4 = 724$$

23. 세 실수 x, y, z 에 대하여 $(x-1):(y-3):(z+2)=2:1:3$ 일 때, $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{2}$

해설

$(x-1):(y-3):(z+2)=2:1:3$ 이므로

$x-1=2k$ 에서 $x=2k+1$

$y-3=k$ 에서 $y=k+3$

$z+2=3k$ 에서 $z=3k-2$

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$ 에 대입하면

$(k-2)^2+(-2k+5)^2+(k-3)^2$

$=6k^2-30k+38$

$=6\left(k-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

따라서 $k=\dfrac{5}{2}$ 일 때, 최솟값이 $\dfrac{1}{2}$ 이다.

24. 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$의 부분집합 중에는 어떤 원소도 다른 원소의 3배가 아닌 수들로만 이루어진 것이 있다. 이와 같은 부분집합의 원소의 개수의 최댓값은?

① 50개 ② 66개 ③ 67개 ④ 76개 ⑤ 78개

해설

문제의 조건을 만족하는 부분집합을 A 라 하자. 어떤 양의 정수 $b(\leq 100)$ 가 A 에 속한다면 $3b$ 는 A 에 속할 수 없다. $3b$ 가 A 에 속하지 않으므로, 이것의 3 배수인 $9b$ 는 A 에 속하여도 된다. 그러나 다시 이것의 3 배수인 $27b$ 는 A 에 속할 수 없다. 또, $27b$ 가 A 에 속하지 않으므로 이것의 3 배수인$81b$ 는 A 에 속한다. 이 과정을 간단히 알아보면 $b \in \mathrm{A} \to 3\mathrm{b} \notin \mathrm{A} \to 9\mathrm{b} \in \mathrm{A} \to 27\mathrm{b} \notin \mathrm{A} \to 81\mathrm{b} \in \mathrm{A}$ 와 같이 된다.

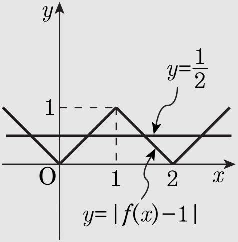
결국 A 의 원소의 개수가 가장 많은 경우 1 부터100 까지의 정수에서 3 의 배수는 제외하고, 9 의 배수 중에서 27 의 배수는 제외시키고, 81 의 배수는 포함시킨다. 1 부터 100 까지의 정수에서 3 의 배수가 아닌 것은 $100 - 33 = 67$ (개), 9 의 배수 중에서 27 의 배수가 아닌 것은 $11 - 3 = 8$ (개), 81 의 배수는 1 (개). 따라서 구하는 최대값은 $67 + 8 + 1 = 76$

25. 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수를 구하면?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$(f \circ f)(x) = |f(x)-1|$ 이므로
$y = |f(x)-1|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = |f(x)-1|$ 의 그래프와
직선 $y = \frac{1}{2}$ 이 4 개의 점에서
만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 4개이다.