1. ${}_{15}C_0 + {}_{15}C_1 + {}_{15}C_2 + {}_{15}C_3 + {}_{15}C_4 + {}_{15}C_5 + {}_{15}C_6 + {}_{15}C_7$ 의 값으로 옳은 것은?

① 2^7 ② 2^8 ③ $2^7 + 2^8$

④ 2^{13} ⑤ 2^{14}

해설

${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$ 이므로

${}_{15}C_0 = {}_{15}C_{15}$, ${}_{15}C_1 = {}_{15}C_{14}$, $\cdots$, ${}_{15}C_7 = {}_{15}C_8$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \frac{1}{2}({}_{15}C_0 + {}_{15}C_1 + {}_{15}C_2 + \cdots + {}_{15}C_{15}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^{15} = 2^{14}\end{aligned}$$

2. ${}_7C_{2r-1} = {}_7C_{r+2}$ 을 만족하는 r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $r = 2$

해설

$7 = (2r-1) + (r+2)$

$\therefore\ r = 2$

3. 다음 연립방정식을 만족하는 n의 값은?

${}_8C_{r-1} ={}_8 C_{3r+1}$, ${}_nC_r +{}_n C_{r+1} = 2 \cdot{}_{2n} C_{r-1}$

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

${}_8C_{r-1} ={}_8 C_{3r+1}$ 에서 $r-1 = 3r+1$

또는 $(r-1)+(3r+1) = 8$, $r > 0$ 이므로

$\therefore\ r = 2$

따라서 두 번째 식에서

${}_nC_r +{}_n C_{r+1} = 2 \cdot{}_{2n} C_{r-1}$

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2 \cdot 2n \ \cdots \text{(i)}$$

$n \geq 3$ 이므로 (i)을 정리하면

$3(n-1)+(n-1)(n-2) = 24$

따라서 $n^2 - 25 = 0$ $\therefore\ n = 5$

4. 10명의 주주 중에서 사장 1명, 부사장 2명을 뽑는 방법의 수는?

① 240 ② 280 ③ 360 ④ 480 ⑤ 720

해설

10명 중에서 사장 1명을 뽑는 가지수는 ${}_{10}C_1$,
나머지 9명 중에서 부사장 2명을 뽑는 가지수는 ${}_{9}C_2$
따라서 ${}_{10}C_1 \times {}_{9}C_2 = 360$

5. 경찰관 7 명과 소방관 5 명 중에서 3 명을 뽑을 때, 3 명의 직업이 같은 경우는 몇 가지인가?

① 45 ② 50 ③ 55 ④ 60 ⑤ 65

해설

경찰관만 뽑힐 경우와 소방관만 뽑힐 경우를 더한다.

$\therefore\ {}_7C_3 + {}_5C_3 = 45$

6. A 지역에는 세 곳, B 지역에는 네 곳, C 지역에는 다섯 곳, D 지역에는 여섯 곳의 관광지가 있다. 이 중에서 세 곳을 선택하여 관광하려고 할 때, 선택한 세 곳이 모두 같은 지역이 되는 경우의 수는?

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

해설

(ⅰ) 선택한 세 곳이 모두 A 지역일 경우 :
$_3C_3 = 1$ (가지)
(ⅱ) 선택한 세 곳이 모두 B 지역일 경우 :
$_4C_3 = 4$ (가지)
(ⅲ) 선택한 세 곳이 모두 C 지역일 경우 :
$_5C_3 = 10$ (가지)
(ⅳ) 선택한 세 곳이 모두 D 지역일 경우 :
$_6C_3 = 20$ (가지)
따라서, ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)에 의하여 $1+4+10+20=35$ (가지)

7. 1 부터 9 까지의 9 개의 자연수 중에서 서로 다른 4 개를 택할 때, 짝수와 3 의 배수가 각각 2 개 이상씩 뽑히는 경우의 수는? (단, 6 은 짝수와 3 의 배수에 중복하여 세어진다.)

① 16　　② 20　　③ 25　　④ 30　　⑤ 36

해설

(i) 6이 뽑히지 않는 경우
6을 제외한 짝수 2, 4, 8중에서 2개를 뽑고,
3의 배수인 3과 9는 반드시 뽑혀야 하므로
이 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_2C_2 = 3$(가지)

(ii) 6이 뽑히는 경우
6을 제외한 나머지 8개의 수 중에서

① 짝수 1개, 3의 배수 1개가 각각 뽑히는 경우
짝수 2, 4, 8중에서 1개,
3의 배수 3, 9중에서 1개,
나머지 1, 5, 7중에서 1개를 뽑아야 하므로
${}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 = 18$(가지)

② 짝수 2개, 3의 배수 1개가 각각 뽑히는 경우
짝수 2, 4, 8중에서 2개,
3의 배수 3, 9중에서 1개를 뽑아야 하므로
${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 6$(가지)

③ 짝수 1개, 3의 배수 2개가 각각 뽑히는 경우
짝수 2, 4, 8중에서 1개,
3의 배수 3, 9중에서 2개를 뽑아야 하므로
${}_3C_1 \times {}_2C_2 = 3$

이상에서 구하는 경우의 수는 $3 + (18 + 6 + 3) = 30$(가지)

8. 3 개의 증권회사, 3 개의 통신회사, 4 개의 건설회사가 있다. 증권, 통신, 건설 각 업종별로 적어도 하나의 회사를 선택하여 총 4 개의 회사에 입사원서를 내는 경우의 수는?

① 120 ② 126 ③ 132 ④ 138 ⑤ 144

해설

(i) 증권, 통신, 건설회사에서 각각 2 개, 1 개, 1 개 의 회사를 선택하는 경우의 수는
$_3C_2 \times {}_3C_1 \times {}_4C_1 = 36$(가지)

(ii) 증권, 통신, 건설회사에서 각각 1 개, 2 개, 1 개 의 회사를 선택하는 경우의 수는
$_3C_1 \times {}_3C_2 \times {}_4C_1 = 36$(가지)

(iii) 증권, 통신, 건설회사에서 각각 1 개, 1 개, 2 개 의 회사를 선택하는 경우의 수는
$_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 54$(가지)

따라서, 구하는 경우의 수는 $36 + 36 + 54 = 126$(가지)

9. 1 에서 10 까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 임의로 선택할 때, 선택된 두 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수는?

① 27 ② 35 ③ 54 ④ 62 ⑤ 70

해설

두 수의 곱은 '홀수× 홀수' 인 경우를 제외하고 모든 경우에 짝수이므로 전체에서 홀수만 2 개 뽑는 경우를 제한다.

${}_{10}C_2 - {}_5C_2 = 45 - 10 = 35$

10. 1부터 45까지의 서로 다른 숫자가 각각 적힌 45개의 공 중에서 6개의 공을 뽑을 때, 3이하의 숫자가 적힌 공이 적어도 1개 이상 나오는 방법의 수는?

① ${}_{45}C_6$ ② ${}_{45}C_6 - {}_{42}C_3$ ③ ${}_{42}C_6$

④ ${}_{45}C_6 - {}_{42}C_6$ ⑤ ${}_{45}C_6 + {}_{42}C_3$

해설

전체의 경우에서 3 보다 큰 숫자 중 6 개의 공을 뽑는 경우를 빼준다.

$\therefore\ {}_{45}C_6 - {}_{42}C_6$

11. 여자가 3명 포함된 10명의 국회 의원 모임에서 3명의 대표를 선출할 때, 적어도 2명의 여자 국회 의원이 대표가 되는 경우의 수는?

① 22 ② 26 ③ 32 ④ 34 ⑤ 45

해설

전체의 경우의 수에서 여자 대표가 1명만 뽑히는 경우와 한 명도 뽑히지 않은 경우의 수를 빼준다.

$\therefore\ {}_{10}C_3 - ({}_3C_1 \times {}_7C_2 + {}_7C_3) = 22$

12. 남학생 4명과 여학생 6명 중에서 4명을 뽑을 때, 남학생과 여학생이 적어도 1명씩 포함되는 경우는 몇 가지인가?

① 105　② 194　③ 195　④ 209　⑤ 210

해설

전체 경우의 수에서 남학생만 뽑는 경우와 여학생만 뽑게 되는 경우의 수를 뺀다.

${}_{10}C_4 - {}_4C_4 - {}_6C_4 = 194$

13. 남자 5 명, 여자 4 명이 있다. 이 중에서 남자 3 명, 여자 3 명을 뽑아 남녀 한 명씩 짝을 짓는 방법의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 240 가지

해설

$_5C_3 \times _4C_3 \times 3! = 10 \times 4 \times 6 = 240$

14. 5 명의 남자와 4 명의 여자로 구성되어 있는 모임에서 임의로 3 명을 뽑을 때, 그 중에 남자 2 명, 여자 1 명을 포함하고 남자들이 이웃하게 서는 방법의 수는?

① 40 ② 60 ③ 80 ④ 120 ⑤ 160

해설

남자 5 명, 여자 4 명에서 남자 2 명, 여자 1 명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_2 \times {}_4C_1$ 이고
남자 2 명과 여자 1 명이 일렬로 서는데 남자가 이웃하게 서는 방법의 수는 $2! \times 2$ 이므로
구하는 방법의 수는 ${}_5C_2 \times {}_4C_1 \times 2! \times 2 = 160$

15. 두 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{4,5,6,7\}$에서 X에서 Y로의 일대일함수의 갯수는?

① 12개　② 24개　③ 28개　④ 32개　⑤ 36개

해설

집합 Y의 원소 $4,5,6,7$에서 서로 다른 세 개를 뽑아

$1 \rightarrow \square,\ 2 \rightarrow \square,\ 3 \rightarrow \square$

의 □ 안에 늘어놓는 경우의 수와 같으므로 구하는 함수의 개수는

${}_4P_3 = 4\times3\times2 = 24$(개)

16. $X = \{2, 4, 6\}$ 에서 $Y = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 로 대응되는 함수 중 $x_1 > x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 인 함수의 개수는?

① 6개 ② 10개 ③ 12개 ④ 15개 ⑤ 20개

해설

Y 의 원소 6 개 중 X 의 원소 $2, 4, 6$ 에
대응될 원소 3 개를 뽑으면 된다.
$\therefore\ {}_6C_3 = 20$

17. 육각형에서 대각선의 개수를 구하여라.

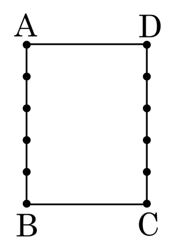
▶ 답: 개

▷ 정답: 9개

해설

구하는 대각선의 개수는 6 개의 꼭짓점 중에서 2 개를 택하는 경우의 수에서 변의 개수인 6 개를 뺀 값과 같으므로 ${}_6C_2$ -6=9

18. 그림과 같이 직사각형 $ABCD$ 의 변 AB , CD 위에 각각 6 개의 점이 있다. 변 AB 위의 점으로부터 변 CD 위의 점으로 서로 만나지 않는 세 개의 선분을 긋는 방법의 수는?

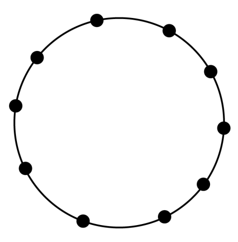


① 100　② 200　③ 250　④ 300　⑤ 400

해설

변AB, CD 에서 세 점씩을 뽑는 방법의 수는
각각 ${}_6\mathrm{C}_3$ 가지 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 에서 택한
각각의 세 점을 점 $A,\ D$ 나 $B,\ C$ 에서
가까운 쪽부터 연결하면 세 선분은 만나지 않으므로
구하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{C}_3 \times {}_6\mathrm{C}_3 = 400$

19. 다음 그림과 같이 원주 위에 10 개의 점이 있다. 이 중에서 2 개의 점을 이어서 만들 수 있는 직선의 개수를 l , 3 개의 점을 이어서 만들 수 있는 삼각형의 개수를 m , 4 개의 점을 이어서 만들 수 있는 사각형의 개수를 n 이라 할 때, $l+m+n$ 의값은?



① 315 ② 330 ③ 345 ④ 360 ⑤ 375

해설

원주 위의 10 개의 점은 어느 세 점도 한 직선 위에 있지 않으므로,

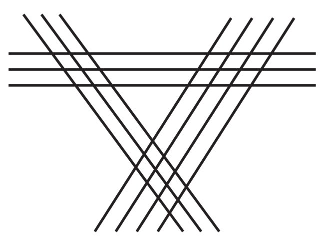
$l = {}_{10}\mathrm{C}_2 = \dfrac{10!}{2!8!} = 45$

$m = {}_{10}\mathrm{C}_3 = \dfrac{10!}{3!7!} = 120$

$n = {}_{10}\mathrm{C}_4 = \dfrac{10!}{4!6!} = 210$

$\therefore\ l+m+n = 375$

20. 서로 평행한 3 개, 3 개, 4 개의 평행선이 오른쪽 그림과 같이 만나고 있다. 주어진 직선을 이용하여 만들 수 있는 평행사변형의 개수는?



① 27 ② 36 ③ 45 ④ 54 ⑤ 63

해설

평행한 직선을 두 쌍 택하면 평행사변형 하나가 결정된다.
가로 방향의 평행선들을 A, 세로 방향의 평행선 부분을 왼쪽부터 B, C라 하면

(i) A, B 에서 평행한 직선 2 개씩을 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 \times {}_3C_2 = 9$

(ii) A, C 에서 평행한 직선 2 개씩을 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18$

(iii) B, C 에서 평행한 직선 2 개씩을 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 18$

(i), (ii), (iii) 에서 구하는 평행사변형의 개수는
$9 + 18 + 18 = 45$

21. 남자 6 명, 여자 2 명을 4 명씩 두 조로 나눌 때, 여자 2 명이 같은 조에 속하는 경우는 몇 가지인가?

① 14 ② 15 ③ 20 ④ 22 ⑤ 30

해설

여자 2 명을 제외한 남자 6 명을 2 명,
4 명으로 나누는 경우를 생각한다.
${}_6C_2 \times {}_4C_4 = 15$

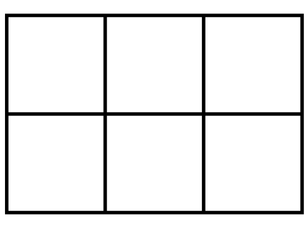
22. 7 명의 학생이 양로원으로 봉사활동을 갔다. 청소 도우미 2 명, 빨래 도우미 2 명, 식사 도우미 3 명으로 역할을 나누려고 할 때, 가능한 방법의 수는?

① 105　② 210　③ 315　④ 420　⑤ 630

해설

청소도우미 2 명을 뽑는 방법의 수는 ${}_7C_2$
빨래도우미 2 명을 뽑는 방법의 수는 ${}_5C_2$
식사도우미 3 명을 뽑는 방법의 수는 ${}_3C_3$ 이므로
${}_7C_2 \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 210$

23. 다음 그림과 같은 6 개의 빈칸에 $2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ 의 6 개의 수를 하나씩 써넣으려고 한다. 1 열, 2 열, 3 열의 숫자들의 합을 각각 a_1, a_2, a_3 라 할 때, $a_1 < a_2 < a_3$ 이 되도록 빈 칸을 채우는 경우의 수는?



① 90 ② 120 ③ 150 ④ 180 ⑤ 210

해설

$2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6$ 중 어느 두 수의 합도 서로 다르다.
따라서, 구하는 경우의 수는 6 개에서 2 개, 2 개,2 개의 3 개 조를 만든 다음 2 개의 수의 자리를 바꾸게 되므로
$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{3!} \times 2^3 = 120$$

24. 서로 다른 종류의 꽃 10송이를 3송이, 3송이, 4송이로 나누어 포장하는 방법의 수는?

① 1800 ② 2000 ③ 2100 ④ 2400 ⑤ 3200

해설

$_{10}C_3 \times _7C_3 \times _4C_4 \times \frac{1}{2!} = 2100$

25. 서로 다른 과일 6 개에 대하여 과일을 1 개, 2 개, 3 개로 나누어 세 학생에게 나누어 주는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ________ 가지

▷ 정답: 360 가지

해설

나눈 후 배열하는 방법까지 고려한다.

$\Rightarrow {}_6C_1 \times {}_5C_2 \times {}_3C_3 \times 3! = 360$

26. 서로 다른 네 개의 다리를 서로 다른 네 개의 건설 팀이 건설하는데 두 팀씩 2 개조로 나누어서 각 조가 2 개씩 나누어 맡아서 건설하기로 하였다. 건설하는 방법의 수는?

① 15　② 18　③ 21　④ 24　⑤ 27

해설

서로 다른 4 개의 다리를 2 개씩 나누는 가지수는

$${}_4C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$$

서로 다른 네 개의 건설 팀을 두 팀씩 2 개조로 나누는 가지수

$${}_4C_2 \times \frac{1}{2!} = 3$$

2 개조가 나누어진 2 개동 중 하나를 선택하는 가지수는 2가지

따라서, 건설하는 방법의 수는

$3 \times 3 \times 2 = 18$ (가지) 이다.

27. 1 부터 9 까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 아홉 장의 카드가 있다. 이 중 4 장의 카드를 뽑아 갑에게 2 장, 을에게 2 장을 주었을 때, 뽑힌 4 장 중 제일 작은 수가 적힌 카드가 갑에게 있을 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 378 가지

해설

9장 중 4장의 카드를 뽑는 방법의 수는

$${}_9C_4 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

뽑힌 4장의 카드 중 제일 작은 수의 카드는 갑에게 주고, 나머지 3장 중 1장의 카드만 갑에게 주면 나머지 2장은 을에게 간다.

$\therefore\ {}_9C_4 \cdot {}_3C_1 = 378$

28. 2000보다 작은 네 자리의 자연수 중에서 각 자리의 숫자 중 두 개만 같은 자연수는 몇 개인지 구하여라.

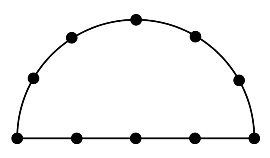
▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 432 개

해설

$1\square\square\square$ 인 네자리 자연수에서
같은 두수가 1 인 수의 개수는
${}_3C_1 \times {}_9P_2 = 216$
같은 두수가 1 이 아닌 수의 개수는
${}_9C_1 \times {}_3C_2 \times {}_8C_1 = 216$ 이므로
구하고자 하는 자연수의 개수는 432 개

29. 다음 그림과 같이 반원 위에 10 개의 점이 있다. 이 중 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형의 개수는?



① 90 ② 120 ③ 140 ④ 155 ⑤ 160

해설

10 개의 점 중에서 4 개의 점을 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_4 = 210$

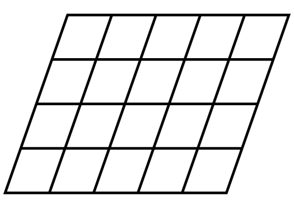
그중에서 사각형이 되지 않는 경우

(i) 직선 위의 5 개의 점 중에서 4 개의 점을 택하는 경우의 수 ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$

(ii) 직선 위의 점 중에서 3 개를 택하고 한 점을 원주 위의 점 중에서 택한 경우 ${}_5C_3 \times 5 = 50$

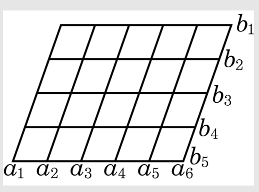
따라서, 구하는 사각형의 수는 $210 - (5 + 50) = 155$

30. 다음 그림과 같이 5 개의 평행선과 6 개의 평행선이 서로 만나고 있다. 이들 평행선으로 이루어진 평행사변형의 개수를 구하면?



① 150개 ② 120개 ③ 90개 ④ 60개 ⑤ 30개

해설



그림에서 평행사변형이 형성되려면
가로축 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 중에서 2 개와 세로축 $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ 중에서 2 개를 연결하면 생기게 되므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{6!}{2!4!} \times \frac{5!}{2!3!} = 15 \times 10 = 150$

31. 아시아 4 개국과 아프리카 4 개국이 있다. 8 개국을 2 개국씩 짝지어 4 개의 그룹으로 나누려고 한다. 적어도 한 개의 그룹이 아시아 국가만으로 이루어지도록 4 개의 그룹으로 나누는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 81 가지

해설

적어도 한 그룹이 아시아 국가만으로 이루어지는 사건의 여사건은 아시아 국가만으로 이루어진 그룹이 하나라도 있으면 안 되므로, 아시아 1 개국과 아프리카 1 개국으로 모든 그룹이 이루어진다.

$\therefore {}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{4!}$

$- \left\{ ({}_4C_1 \times {}_4C_1) \times ({}_3C_1 \times {}_3C_1) \times ({}_2C_1 \times {}_2C_1) \right.$

$\left. \times ({}_1C_1 \times {}_1C_1) \times \frac{1}{4!} \right\}$

$= \frac{28 \times 15 \times 6}{4 \times 3 \times 2} - \frac{16 \times 9 \times 4}{4 \times 3 \times 2} = 105 - 24 = 81$

32. 7 층짜리 건물의 1 층에서 7 명이 승강기를 함께 탄 후 7 층까지 올라가는 동안 각각 2 명, 2 명, 3 명이 내리는 방법의 수는?

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 12600 개

해설

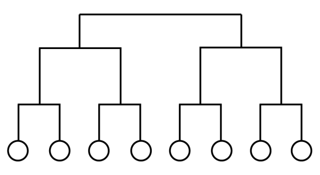
7 명을 2 명, 2 명, 3 명씩 3 개의 조로
나누는 방법의수는

$_7C_2 \times _5C_2 \times _3C_3 \times \frac{1}{2!} = 105$

3 개의 조가 2 층부터 7 층까지 6 개의 층 중
3 개의 층에서 각각 내리므로 구하는 방법의 수는

$105 \times _6P_3 = 12600$

33. 대한민국, 일본, 중국, 대만에서 대표 선수 2 명씩 총 8 명이 출전한 바둑대회가 열린다. 이 대회에서는 오른쪽 그림과 같은 대진표에 의해 토너먼트 방식으로 경기를 하여 우승팀을 가리기로 할 때, 같은 나라에서 출전한 선수끼리는 결승전 이외에는 만나지 않도록 대진표를 작성하는 경우의 수를 구하여라. (단, 대진표에서의 위치와는 상관없이 시합하는 상대가 같은 대진표는 같은 것으로 한다.)

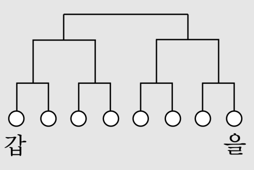


▶ 답 : ______ 가지

▷ 정답 : 72 가지

해설

대한민국의 대표선수를 각각 갑, 을이라 하면
대진표의 위치는 상관없으므로 갑, 을 두 선수를
다음 그림과 같이 배치해도 일반성을 잃지 않는다.



나머지 3 개국에서 갑과 같은 조에서 시합을 할
1 명씩을 뽑는 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 = 8$(가지)
이 때, 갑과 같은 조에 속한 3 명 중 갑과 첫 시합을 할 사람을
택하는 경우의 수는
${}_3C_1 = 3$(가지) 이고, 나머지 두 명은 자동으로
서로 첫 시합 상대가 된다. 한편, 을과 같은 조에
속할 나머지 3 명의 선수들은 갑과 같은 조에
속한 3 명을 제외한 나머지 3 명으로 이 경우의
수는 1 가지이다. 이 때, 을과 같은 조에 속한
3 명 중 을과 첫 시합을 할 사람을 택하는 경우의
수는 ${}_3C_1 = 3$(가지) 이고, 나머지 두 명은
자동으로 서로 첫 시합 상대가 된다.
따라서, 구하는 대진표의 경우의 수는
$8 \times 3 \times 1 \times 3 = 72$(가지)