1. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ 의 중심의 좌표는?

① $(2, -4)$ ② $(2, 4)$ ③ $(-2, -3)$

④ $(-2, 3)$ ⑤ $(4, -4)$

해설

$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$

$\Rightarrow$ 중심은 $(-2, 3)$

2. 점 $(5,\ 1)$과 $(-1,\ 7)$을 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식은?

① $(x-1)^2+(y-2)^2=12$ ② $(x-2)^2+(y-1)^2=15$

③ $(x-2)^2+(y-4)^2=18$ ④ $(x-2)^2+(y-6)^2=21$

⑤ $(x-4)^2+(y-6)^2=25$

해설

두 점의 중점을 C라 하면 $C(2,4)$

구하는 원의 반지름의 길이는

$r=\sqrt{(2-(-1))^2+(4-7)^2}=\sqrt{18}$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-4)^2=18$

3. $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3,\ 1)$ 에서 접하는 직선이 있다. 이 직선의 기울기를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

원 $x^2 + y^2 = 10$ 위의 점 $(-3, 1)$ 에서의
접선의 방정식은 $-3 \cdot x + 1 \cdot y = 10$
따라서 이 직선의 기울기는 3

4. 중심이 $(2,\ 3)$ 이고 y 축에 접하는 원의 방정식은?

① $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ ② $(x-2)^2+(y-3)^2=9$

③ $(x+2)^2+(y+3)^2=4$ ④ $(x+2)^2+(y+3)^2=9$

⑤ $(x-4)^2+(y-4)^2=5$

해설

중심이 $(2,3)$ 일 때 y 축에 접해야 하므로
반지름의 길이는 2 이다.

5. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

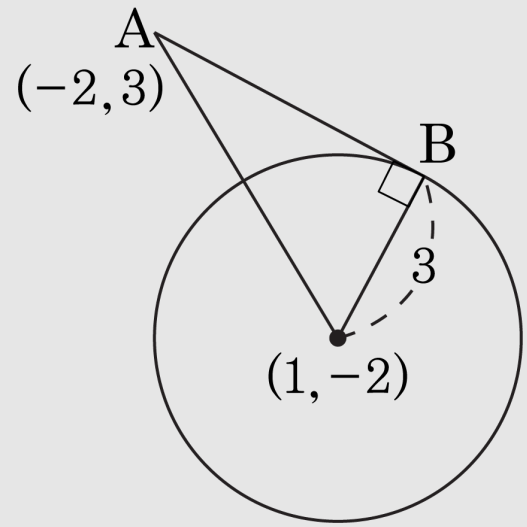
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



6. 두 원 $x^2+y^2=1$, $(x-4)^2+y^2=4$ 의 공통외접선의 길이로 알맞은 것은?

① $\sqrt{15}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{11}$ ④ $\sqrt{10}$ ⑤ $\sqrt{7}$

해설

중심 $(0,0)$ 과 $(4,0)$ 사이의 거리를 구하면 4 이다.
두 원의 반지름의 길이가 1 과 2 이로 공통외접선의 길이는 $\sqrt{4^2-1}=\sqrt{15}$ 이다.

7. 좌표평면의 원점을 O라 할 때 곡선 $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$ 위의 점 P에 대하여 선분 $\overline{OP}$의 길이의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 = 0$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 2^2$

$\overline{OP}$ 의 최댓값은 원점과 원의 중심 사이의 거리에 원의 반지름의 길이를 더한 것이므로 $\overline{OP}$ $\sqrt{4^2 + 3^2} + 2 = 7$

8. 좌표평면 위의 두 점 $A(8,0)$, $B(0,6)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 외접원의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, 세 상수 a,b,c 의 곱 abc 의 값을 구하여라. (단, O 는 원점)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\angle AOB = 90°$ 이므로 선분 AB 는 외접원의 지름이다.
$\overline{AB} = 10$ 이고 원의 중심은 $C(4,3)$ 이므로 원의 방정식은 $(x-4)^2+(y-3)^2=5^2$
이 식을 정리하면 $x^2+y^2-8x-6y=0$
$a=-8,\ b=-6,\ c=0$
$\therefore abc=0$

9. 두 원 $x^2+y^2-36=0$, $x^2+y^2-3x+4y-11=0$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{11}$ ③ $3\sqrt{11}$ ④ $4\sqrt{11}$ ⑤ $5\sqrt{11}$

해설

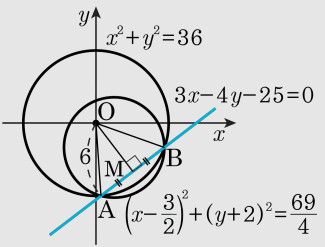
두 원의 공통현의 방정식은

$x^2 + y^2 - 36 - (x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11) = 0$

$\therefore 3x - 4y - 25 = 0 \cdots\cdots$ ㉠

$x^2 + y^2 - 3x + 4y - 11 = 0$에서

$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y+2)^2 = \frac{69}{4}$



이므로 두 원을 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.

다음의 그림과 같이 두 원의 교점을 A, B

$\overline{AB}$의 중점을 M이라 하면

원 $x^2 + y^2 = 36$의 중심 $(0, 0)$과 직선 ㉠사이의 거리 $\overline{OM}$은

$$\overline{OM} = \frac{|-25|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 5$$

원 $x^2 + y^2 = 36$의 반지름의 길이는 6이므로

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AM} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$

따라서, 공통현의 길이 $\overline{AB}$는

$\overline{AB} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{11}$

10. 점 $(1, -1)$에서 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$에 그은 접선은 두 개 있다. 이 때, 이 두 직선의 기울기의 합은?

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

점 $(1, -1)$을 지나고 기울기가 m인 접선을
$y+1=m(x-1)$, 즉 $mx-y-m-1=0$이라고 하면
원의 중심 $(-1, 2)$에서 접선까지의 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.

따라서 $1=\dfrac{|-2m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$,

$|-2m-3|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2+12m+8=0$

따라서 두 기울기의 합은 근과 계수와의 관계에 의하여 -4이다.