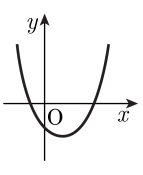
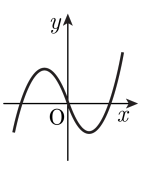
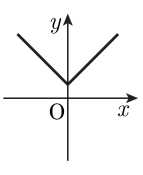
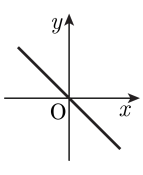
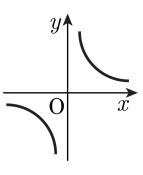
1. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.
일대일 대응이란 변수 x, y가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.
⑤ 번은 $x = 0$ 에 대응되는 y가 없다.

2. 다음 함수 $y = 2x - 5\ (x \geq 1)$ 의 역함수를 구하면?

① $y = 2x - 5$
② $y = 2x - 5(x \geq 1)$
③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}(x \geq 1)$
⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}(x \geq -3)$

해설

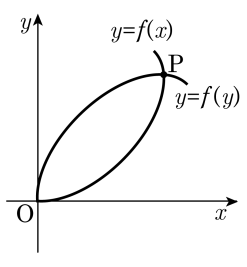
$y = 2x - 5(x \geq 1, y \geq -3) \rightarrow x = 2y - 5$

$\rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

여기서 $x \rightarrow y,\ \ y \rightarrow x$ 이므로 $x \geq -3$ 이 된다.

$\therefore\ y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\ (x \geq -3)$

3. 다음 그림과 같은 두 곡선 $y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 의 교점 P 가 될 수 있는 점은 무엇인가?



① $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ ② $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$

③ $(1,\ 2)$ ④ $(2,\ 2)$

⑤ $(2,\ 3)$

해설

$y = f(x)$ 와 $x = f(y)$ 는
서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의
교점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점과 같다.
따라서 점 P 는 직선 $x = y$ 위의 점이므로
$(2,\ 2)$ 이다.

4. 유리식 $\dfrac{(x-1)(x+2)(x+4)}{x^3+3x^2-4}$ 를 간단히 하면?

① $\dfrac{x+2}{x-1}$ ② $\dfrac{x+1}{x+2}$ ③ $\dfrac{x+4}{x+2}$ ④ $\dfrac{x+1}{x-2}$ ⑤ $\dfrac{x+4}{x-2}$

해설

$$\frac{(x-1)(x+2)(x+4)}{x^3+3x^2-4} = \frac{(x-1)(x+2)(x+4)}{(x-1)(x+2)^2}$$
$$= \frac{x+4}{x+2}$$

5. 분수식 $\dfrac{x}{x^2-4} \times \dfrac{x-2}{x^2+2x}$ 의 계산 결과는?

① $\dfrac{-1}{(x+2)^2}$ ② $\dfrac{1}{(x+2)^2}$ ③ $\dfrac{2}{(x+2)^2}$

④ $\dfrac{-1}{x(x+2)^2}$ ⑤ $\dfrac{1}{x(x+2)^2}$

해설

$$\frac{x}{(x+2)(x-2)} \times \frac{x-2}{x(x+2)} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

6. 다음 계산 중 옳은 것은?

① $\dfrac{a^2x^2}{a^2x}=2$

② $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=3+\sqrt{6}$

③ $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{x+1}$

④ $\sqrt{(-3)^2}=-3$

⑤ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a+1}{b+1}$

해설

① 방정식이므로 참, 거짓 판별 못함.

② $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-\sqrt{6}$: ×

③ $1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=1-\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x}}=1-\dfrac{x}{x+1}$

$=\dfrac{1}{x+1}$: ○

④ $\sqrt{(-3)^2}=3$: ×

⑤ $\dfrac{a}{b}\neq\dfrac{a+1}{b+1}$: ×

7. 함수 $f(x)=mx+n$에 대하여 $f^{-1}(3)=2,\ (f\circ f)(2)=7$이 성립할 때, 상수 m,n의 합 $m+n$의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1}(3)=2$이므로
역함수의 정의에 의해서
$f(2)=3, (f\circ f)(2)=7$에서 $f(f(2))=f(3)=7$
$2m+n=3\cdots$㉠
$3m+n=7\cdots$㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=4, n=-5$
$\therefore m+n=-1$

8. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수

$f(x)=\begin{cases} x+k & (x \geq 0) \\ -x+k & (x<0) \end{cases}$ 가 $f^{-1}(2)=-3$ 을 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값은 얼마인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

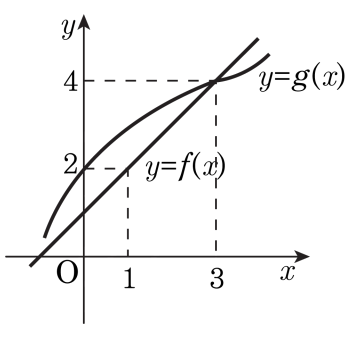
$f^{-1}(2)=-3$ 에서 $f(-3)=2$ 이므로

$f(-3)=3+k=2$

$\therefore\ k=-1$ 이므로 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x<0) \end{cases}$

$\therefore\ f(5)=5-1=4$

9. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1}\circ f)(1)+g(3)$의 값은 얼마인가?



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면
$(g^{-1}\circ f)(1)+g(3)=g^{-1}(f(1))+4$
$=g^{-1}(2)+4$
$g^{-1}(2)=k$로 놓으면 $g(k)=2$
문제의 그림에서 $y=g(x)$의 그래프가
$(0,2)$를 지나므로 $g(0)=2$
이 때, $y=g(x)$는 일대일대응이므로 $k=0$
$\therefore g^{-1}(2)+4=0+4=4$

10. 함수 $f(x)=ax+3$ 에 대하여 $f^{-1}=f$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f^{-1}=f$ 의 양변에 함수 f 를 합성하면
$f^{-1}\circ f=f\circ f$
이때, $f^{-1}\circ f=I$(I는항등함수) 이므로 $f\circ f=I$
즉 $(f\circ f)(x)=x$
$\therefore (f\circ f)(x)=f(f(x))=f(ax+3)$
$=a(ax+3)+3=a^2x+3a+3=x$
따라서 $a^2=1,\ 3a+3=0$ 이므로 $a=-1$

11. $x : y = 2 : 3$ 일 때, $\dfrac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy}$ 의 값을 구하여라.

① $\dfrac{12}{5}$ ② $\dfrac{5}{12}$ ③ $\dfrac{13}{5}$ ④ $\dfrac{5}{13}$ ⑤ 5

해설

$x : y = 2 : 3 \Rightarrow x = 2k, y = 3k$

$$\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy} = \frac{3(2k)^2 + 2(2k)(3k)}{4k^2 + (2k)(3k)}$$

$$= \frac{24k^2}{10k^2} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

12. 양수 a, b, c, d 는 $a : b = c : d$가 성립한다. 다음 중에서 옳은 것은?

① $ac = bd$　　② $\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$　　③ $a + b = c + d$

④ $a - c = b - d$　　⑤ $\dfrac{a}{d} = \dfrac{b}{c}$

해설

$a : b = c : d$이면 $ad = bc$

13. 일대일 대응인 두 함수 f, g 에 대하여 $f(4)=2$, $g^{-1}(3)=2$ 일 때, $\dfrac{(g\circ f)^{-1}(3)}{g(2)}$ 의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{8}{3}$

해설

$f(4)=2$, $g^{-1}(3)=2$ 에서 $f^{-1}(2)=4$, $g(2)=3$

$(g\circ f)^{-1}(3)=(f^{-1}\circ g^{-1})(3)=f^{-1}(g^{-1}(3))$

$\qquad\qquad =f^{-1}(2)=4$

$\therefore\ \dfrac{(g\circ f)^{-1}(3)}{g(2)}=\dfrac{4}{3}$

14. 분수식 $\frac{2x}{x+1}+\frac{3x-2}{x-1}-\frac{5x^2-7x+3}{x^2-x}$ 을 간단히 하면?

① $-\frac{x-3}{x(x+1)}$ ② $\frac{x-3}{x(x+1)}$ ③ $\frac{x+3}{x(x+1)}$
④ $\frac{x+3}{x(x-1)}$ ⑤ $\frac{x-3}{x(x-1)}$

해설

(준식)

$$=\frac{2x(x-1)+(3x-2)(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{5x^2-7x+3}{x(x-1)}$$

$$=\frac{5x^2-x-2}{(x-1)(x+1)}-\frac{5x^2-7x+3}{x(x-1)}$$

$$=\frac{(5x^3-x^2-2x)-(5x^2-7x+3)(x+1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{(x+3)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\frac{x+3}{x(x+1)}$$

해설

분자의 차수를 줄여서 계산할 수 있다.

$$\frac{2x}{x+1}+\frac{3x-2}{x-1}-\frac{5x^2-7x+3}{x^2-x}$$

$$=\frac{2(x+1)-2}{x+1}+\frac{3(x-1)+1}{x-1}-\frac{5(x^2-x)-2x+3}{x^2-x}$$

$$=(2+3-5)+\frac{-2}{x+1}+\frac{1}{x-1}+\frac{2x-3}{x(x-1)}$$

$$=\frac{-2(x-1)+x+1}{(x+1)(x-1)}+\frac{2x-3}{x(x-1)}$$

$$=\frac{x(-x+3)+(2x-3)(x+1)}{x(x+1)(x-1)}$$

$$=\frac{(x-1)(x+3)}{x(x+1)(x-1)}=\frac{x+3}{x(x+1)}$$

15. $\dfrac{x+2}{x+1}-\dfrac{x+3}{x+2}-\dfrac{x+4}{x+3}+\dfrac{x+5}{x+4}$를 간단히 하면?

① $\dfrac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

② $\dfrac{2}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

③ $\dfrac{2x}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

④ $\dfrac{2(x-1)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

⑤ $\dfrac{2(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= \left(1+\frac{1}{x+1}\right)-\left(1+\frac{1}{x+2}\right)\\ &\quad -\left(1+\frac{1}{x+3}\right)+\left(1+\frac{1}{x+4}\right)\\ &= \frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}\\ &= \frac{2x+5}{(x+1)(x+4)}-\frac{2x+5}{(x+2)(x+3)}\\ &= \frac{(2x+5)(x^2+5x+6-x^2-5x-4)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\\ &= \frac{2(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}\end{aligned}$$

16. 세 실수 x, y, z의 평균이 4이고, $\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}$가 성립할 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$의 값은?

① $\frac{7}{12}$ ② $\frac{9}{12}$ ③ $\frac{10}{12}$ ④ $\frac{11}{12}$ ⑤ $\frac{13}{12}$

해설

평균이 4이므로, $x+y+z=12 \quad \cdots$①

$\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}=k$라 하면,

$$\begin{cases} x+y=3k \\ y+z=4k \\ z+x=5k \end{cases}$$

다 더하면, $2(x+y+z)=12k \Rightarrow k=2(\because$ ①)

다시 k를 위 식에 대입하고 연립방정식의 풀면 x, y, z를 구할 수 있다.

$x=4,\ y=2,\ z=6$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$

17. 세 자연수 $a,\ b,\ c$가 $\dfrac{2b}{a}=\dfrac{3c}{2b}=\dfrac{a}{3c}$를 만족하고 $a,\ b,\ c$의 최소공배수가 12일 때, $a+b+c$의 값은?

① 22 ② 20 ③ 18 ④ 16 ⑤ 14

해설

$a+2b+3c\neq 0$ ($\because a,\ b,\ c$는 자연수)이므로
가비의 리에 의하여

$\dfrac{2b}{a}=\dfrac{3c}{2b}=\dfrac{a}{3c}=\dfrac{a+2b+3c}{a+2b+3c}=1$에서

$a=3c,\ a=2b\ \therefore b=\dfrac{1}{2}a,\ \ c=\dfrac{1}{3}a$

$\therefore a\ :\ b\ :\ c=a\ :\ \dfrac{1}{2}a\ :\ \dfrac{1}{3}a$

$=6\ :\ 3\ :\ 2$

세 수의 최대공약수를 G라 하면

$a=6G,\ b=3G,\ c=2G$

(최소공배수)$=6G=12,\ G=2$

그러므로 $a=12,\ b=6,\ c=4$

$\therefore\ a+b+c=22$