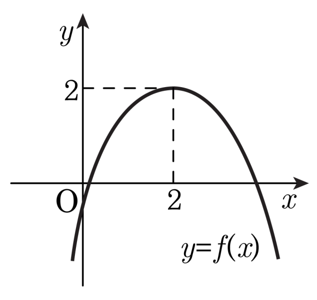
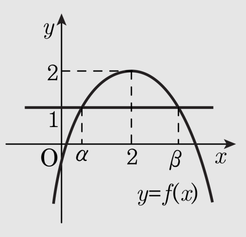
1. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

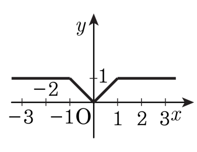
해설

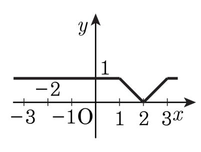
$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 라 하면
$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2 개이지만
$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.

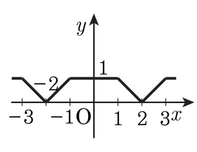


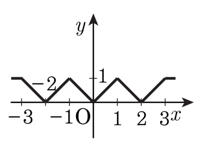
따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2 개이다.

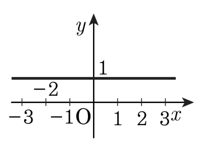
2. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$의 그래프는?

①


②


③


④


⑤


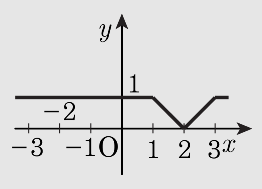
해설

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$$

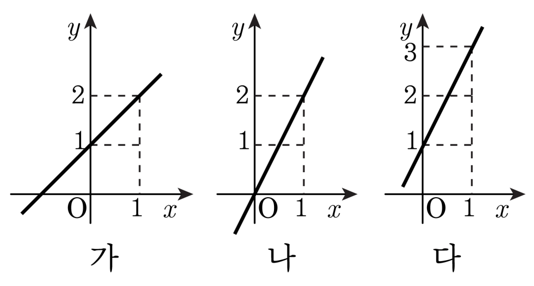
$g(x) = x - 2$ 에서

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x-2| \geq 1) \\ |x-2| & (|x-2| < 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x-2| & (1 < x < 3) \end{cases}$$



3. 다음 그림은 함수 $f(x)$, $g(x)$, $w(x)$ 의 그래프를 차례로 나타낸 것이다.



가 나 다

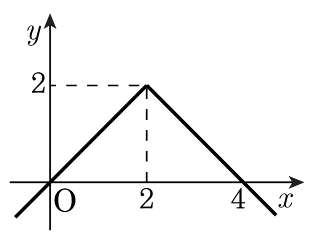
다음 중 $w(x)$를 $f(x)$와 $g(x)$를 이용하여 나타낸 것은?

① $f \circ g$ ② $g \circ f$ ③ $f \circ f$ ④ $f+g$ ⑤ $f-g$

해설

그래프를 보고 함수식을 구하면
$f(x)=x+1,\ g(x)=2x,\ w(x)=2x+1$ 이다.
$f(g(x))=f(2x)=2x+1=w(x)$ 이므로
$\therefore\ w=f\circ g$

4. $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개

④ 4 개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$$f(x) = \begin{cases} y = x(x \le 2) & \cdots ㉠ \\ y = -x + 4(x > 2) & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$

$\therefore x = 1$

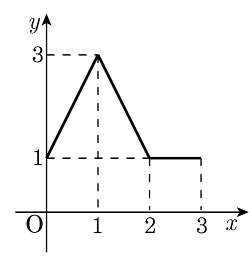
㉡에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x+4)$

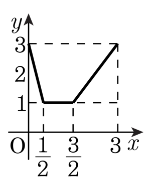
$= -x + 4$

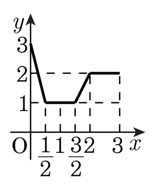
$\therefore x = 3$

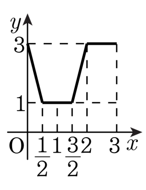
실근의 개수 : 2 개.

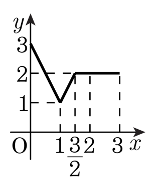
5. 함수
$y=f(x)\,(0\le x\le 3)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 합성함수 $y=(f\circ f)\,(x)\,(0\le x\le 3)$ 의 그래프는 무엇인가?

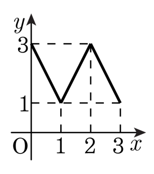


①


②


③


④


⑤


해설

$0\le x\le 2$ 에서 $y=f(x)$ 의 그래프가
$x=1$ 에 대하여 대칭이므로
$y=(f\circ f)\,(x)$ 의 그래프도
$0\le x\le 2$ 에서 $x=1$ 에 대하여 대칭이다.
$y=(f\circ f)\,(x)=f\,(f(x))$ 에서
$f\,(f(0))=f(1)=3$
$f(f(1))=f(3)=1$
$f(f(2))=f(1)=3$
$f\,(f(3))=f(1)=3$
따라서, $y=(f\circ f)\,(x)$ 를
그래프로 나타내면 ③과 같다.

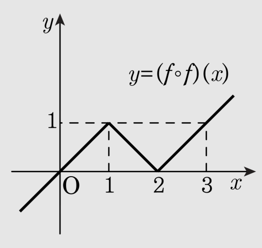
6. $0 \le x \le 2$에서 함수 $f(x) = |x-1|$에 대하여 방정식 $(f \circ f)(x) = ax+b$의 실근의 개수가 무수히 많도록 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (단, $b \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

방정식 $(f \circ f)(x) = ax + b$의 실근의 개수는
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프와
직선 $y = ax + b$의 교점의 개수와 같다.
$f(x) = |x-1|$에서
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = ||x-1|-1|$
따라서 $0 \le x \le 2$에서
$y = (f \circ f)(x)$의 그래프가 다음 그림과 같으므로 실근의 개수가 무수히 많으려면 직선의 방정식은 $y = x$ 또는 $y = -x + 2$이어야 한다.



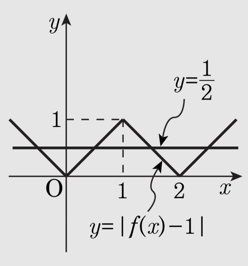
그런데, $b \neq 0$이므로 $y = -x + 2$
따라서 $a = -1$, $b = 2$이므로 $ab = -2$

7. 함수 $f(x) = |x-1|$ 에 대하여 $(f \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수를 구하면?

① 0 개　② 1 개　③ 2 개　④ 3 개　⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = |f(x)-1|$ 이므로
$y = |f(x)-1|$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y = |f(x)-1|$ 의 그래프와
직선 $y = \frac{1}{2}$ 이 4 개의 점에서
만나므로 주어진 방정식의 실근의 개수는 4 개이다.

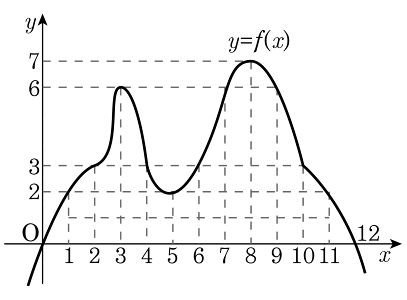
8. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 A에서 A로의 두 함수 $f,\ g$가 일대일 대응이고 $f(2) = 1$, $g(3) = 3$, $(f \circ g)(1) = 2$일 때, $(g \circ f)(1) + (g \circ f)(3)$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$g(3) = 3$이고 함수 g는 일대일 대응이므로 $g(1) = 1$ 또는 $g(1) = 2$이다.
만약 $g(1) = 2$ 라고 가정하면
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2$ 이다.
그러나 문제의 조건에서 $f(2) = 1$ 이므로 모순이다.
따라서 $g(1) = 1$ 이다.
$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1)$ 이고
$(f \circ g)(1) = 2$ 이므로 $f(1) = 2$ 이다.
$f(1) = 2$, $f(2) = 1$ 이므로 $f(3) = 3$ 이다.
$g(1) = 1$, $g(3) = 3$ 이므로 $g(2) = 2$ 이다.
$$\begin{aligned} \therefore (g \circ f)(1) + (g \circ f)(3) &= g(f(1)) + g(f(3)) \\ &= g(2) + g(3) \\ &= 2 + 3 = 5 \end{aligned}$$

9. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같다. 함수 $g(x)$ 가 $g(x) = (f \circ f)(x+2)$ 일 때, $g(x) = 6$ 을 만족시키는 실수 x 의 개수는 몇 개인가? (단, $x < 0$ 또는 $x > 12$ 일 때, $f(x) < 0$ 이다.)



① 3개　② 4개　③ 5개　④ 6개　⑤ 7개

해설

$g(x) = 6$ 에서 $(f \circ f)(x+2) = 6$ 이므로,
$f(f(x+2)) = 6$
$x+2 = t$ 로 놓으면 $f(f(t)) = 6$
$\therefore f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$ 또는 $f(t) = 9$
그런데 $f(t) \le 7$ 이므로
$f(t) = 3$ 또는 $f(t) = 7$
(i) $f(t) = 3$ 일 때,
　$t = 2$ 또는 $t = 4$ 또는 $t = 6$ 또는 $t = 10$
　$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 4$ 또는 $x = 8$
(ii) $f(t) = 7$ 일 때, $t = 8$
　$\therefore x = 6$
(i), (ii) 에서
실수 x 의 값은 0 , 2 , 4 , 6 , 8 의 5 개이다.

10. 자연수 전체의 집합 N 에서 N 으로의 함수 f 를

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & (n\text{이 2의 배수일 때})\\ n+1 & (n\text{이 2의 배수가 아닐 때})\end{cases}$$ 로 정의하자.

$f=f^1,\ f\circ f=f^2,\ f\circ f^2=f^3,\ \cdots,\ f\circ f^n=f^{n+1}$ 으로 나타낼 때, $f^k(10)=2$ 를 만족하는 자연수 k 의 최솟값은? (단, n 은 자연수이다.)

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$f^k(10)$ 에 $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 을 차례로 대입하면
$f(10)=5$
$f^2(10)=f(f(10))=f(5)=6$
$f^3(10)=f(f^2(10))=f(6)=3$
$f^4(10)=f(f^3(10))=f(3)=4$
$f^5(10)=f(f^4(10))=f(4)=2$
따라서, $f^k(10)=2$ 가 되는 k 의 최솟값은 5이다.

11. 함수 $y=f(x)$ 에서 $f^{(2)}=f\circ f$, $f^{(3)}=f\circ f^{(2)}$, $\cdots$, $f^{(n)}=f\circ f^{(n-1)}$ 라 정의한다. $f(x)=2x-1$ 에 대하여 $f(1)+f^{(2)}(1)+f^{(3)}(1)+\cdots+f^{(2008)}(1)$ 의 값을 구하여라.

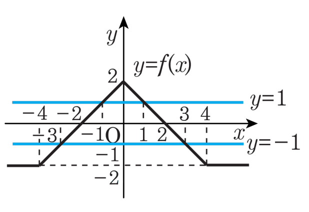
▶ 답 :

▷ 정답 : 2008

해설

$f(1)=1$,
$f^{(2)}(x)=(f\circ f)(x)=f(2x-1)=4x-3$ 에서 $f^{(2)}(1)=1$,
$f^{(3)}(x)=(f\circ f^{(2)})(x)=f(4x-3)=8x-7$ 에서 $f^{(3)}(1)=1$
$f^{(4)}(x)=(f\circ f^{(3)})(x)=f(8x-7)=16x-15$ 에서 $f^{(4)}(1)=1$
이다.
이와 같이 추론하면 $f^{(n)}(x)=2^n x-(2^n-1)$, $f^{(n)}(1)=1$ 이다.
$\therefore\ f(1)+f^{(2)}(1)+f^{(3)}(1)+\cdots+f^{(2008)}(1)=1\times 2008=2008$

12. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 모든 x 의 값의 곱은?



① -3 ② -1 ③ 3

④ 6 ⑤ 9

해설

주어진 그래프로부터 함수 $f(x)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & (x \le -4) \\ x+2 & (-4 < x \le 0) \\ -x+2 & (0 < x \le 4) \\ -2 & (x > 4) \end{cases}$$

한편, $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1$ ……㉠

㉠ 에서 $f(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표이므로

위의 그림에서 $x = -1,\ x = 1$

따라서, ㉠에서 $f(x) = -1$ 또는 $f(x) = 1$

(i) $f(x) = -1$ 일 때, 이를 만족하는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = -1$ 의 교점의 x 좌표이므로

위의 그림에서 $x = -3$ 또는 $x = 3$

(ii) $f(x) = 1$ 일 때, 이를 만족하는 x 의 값은

$y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표이므로

위의 그림에서 $x = -1$ 또는 $x = 1$

(i), (ii) 로부터 구하는 모든 x 의 값의 곱은

$(-3) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 1 = 9$

13. 함수 $f(x)=|x+1|-2$ 에서 $f(x)=(f\circ f)(x)$ 를 만족하는 실수 x 값들의 합을 구하면?

① -2　　② -1　　③ $-\frac{3}{2}$　　④ 1　　⑤ 0

해설

$f(x)=|x+1|-2$ 에서

$f(f(x))=f(|x+1|-2)=||x+1|-2+1|-2$

$=||x+1|-1|-2$

(i) $x\ge 0$ 일 때, $f(f(x))=x-2$

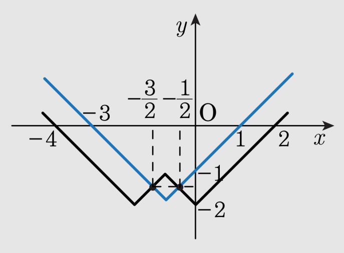
(ii) $-1\le x<0$ 일 때, $f(f(x))=-x-2$

(iii) $-2\le x<-1$ 일 때, $f(f(x))=x$

(iv) $x<-2$ 일 때, $f(f(x))=-x-4$

(i), (ii) 의 경우 $f(x)=x-1$

(iii), (iv) 의 경우 $f(x)=-x-3$



따라서 교점은 $x=-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}$ 일 때 생기고

$f(x)=(f\circ f)(x)$를 만족한다.

$\therefore\ -\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$