

1. 첫째항이 -25 , 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9항

② 제 10항

③ 제 11항

④ 제 12항

⑤ 제 13항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -25 + (n - 1) \times 3 = 3n - 28$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$3n - 28 > 0, 3n > 28$$

$$\therefore n > \frac{28}{3} = 9.33\dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

2. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 3n$ 일 때, a_{100} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 196

해설

$$\begin{aligned} a_{100} &= S_{100} - S_{99} \\ &= 100^2 - 3 \cdot 100 - (99^2 - 3 \cdot 99) \\ &= (100^2 - 99^2) - 3(100 - 99) \\ &= 199 - 3 \\ &= 196 \end{aligned}$$

3. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

16, -8, 4, -2, ……

① $8(-2)^n$

② $16(-2)^{n-1}$

③ $8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

④ $16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

⑤ $32\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

해설

주어진 수열은 첫째항이 16 이고 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 $a_n =$

$$16\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

4. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45

② 48

③ 49

④ 50

⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

5. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

1, 4, 9, 16...

① n

② $3n - 2$

③ $2n + 1$

④ n^2

⑤ $(n + 1)^2$

해설

$$a_1 = 1, a_2 = 4 = 2^2, a_3 = 9 = 3^2, a_4 = 16 = 4^2, \dots$$

$$\therefore a_n = n^2$$

6. 집합 $\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ 에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3 이 $2a_2 = a_1 + a_3$ 을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$ 이다.)

① 5

② 6

③ 7

④ 8

⑤ 9

해설

$$2a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow \text{등차수열}$$

① 공차가 2인 경우 (4가지)

2, 4, 6 4, 6, 8 6, 8, 10 8, 10, 12

② 공차가 4인 경우 (2가지)

2, 6, 10 4, 8, 12

7. 1과 10사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$$1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$$

$$1, b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\frac{a_{10} - a_1}{b_{20} - b_1}$ 의 값은?

① $\frac{209}{189}$

② $\frac{11}{189}$

③ $\frac{209}{11}$

④ $\frac{189}{209}$

⑤ 1

해설

1, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}, 10$ 의 공차를 p 라 하면

$$1 + 11p = 10 \Rightarrow p = \frac{9}{11}$$

1, $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{20}, 10$ 의 공차를 q 라 하면

$$1 + 21q = 10 \Rightarrow q = \frac{9}{21}$$

$$\therefore \frac{a_{10} - a_1}{b_{20} - b_1} = \frac{9p}{19q} = \frac{9 \cdot \frac{9}{11}}{19 \cdot \frac{9}{21}} = \frac{189}{209}$$

8. 두 수 $2p + 1$ 과 $2p + 5$ 의 등차중항이 p^2 일 때, 양수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$2p + 1, p^2, 2p + 5 \text{ 가 등차수열을 이루므로 } p^2 = \frac{(2p + 1) + (2p + 5)}{2}$$

$$2p^2 = 4p + 6, p^2 - 2p - 3 = 0$$

$$(p + 1)(p - 3) = 0$$

따라서 $p = -1$ 또는 $p = 3$

이때, p 는 양수이므로 $p = 3$

9. 오각형의 다섯 개의 내각을 각각 v, w, x, y, z 라 하면 $v < w < x < y < z$ 이고 순서대로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, x 의 값은?

- ① 92° ② 108° ③ 112° ④ 121° ⑤ 138°

해설

오각형의 내부는 세 개의 삼각형으로 나누어지므로
그 내각의 총합은 $v + w + x + y + z = 540^\circ$ 이다.

또한 각 내각을 등차수열의 각 항으로 표현하면

d 를 공차로 생각하여 $x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d$ 와 같이
표현할 수 있다. 이것을 위 식에 대입하면

$(x - 2d) + (x - d) + x + (x + d) + (x + 2d) = 540^\circ$ 이므로 $x = 108^\circ$
이다.

10. 첫째항이 35인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 10항까지의 합과 제 11항의 값이 같을 때, 첫째항부터 제 10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -55

해설

$$S_{10} = a_{11}$$

$$S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$a_{11} = a + 10d$$

$$\frac{10(2a + 9d)}{2} = 10a + 45d$$

$$10a + 45d = a + 10d$$

$$9a = -35d$$

$$a = 35 \div \text{므로 } d = -9$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(2a + 9d)}{2}$$

$$= \frac{10(70 - 81)}{2}$$

$$= \frac{-110}{2} = -55$$

11. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = -n^2 + 2n$ 일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$ 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -280

해설

$$\begin{aligned} & a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}) \\ &= (-20^2 + 2 \times 20) - (-10^2 + 2 \times 10) \\ &= -360 - (-80) = -280 \end{aligned}$$

12. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_1 + a_2) : (a_3 + a_4) = 1 : 2$ 가 성립할 때, $a_4 : a_7$ 는? (단, $a_1 \neq 0$ 이다.)

① 1 : 2

② 1 : 3

③ 2 : 3

④ 2 : 5

⑤ 3 : 5

해설

$$a_3 + a_4 = 2(a_1 + a_2)$$

$$a + 2d + a + 3d = 2(a + a + d)$$

$$2a + 5d = 4a + 2d$$

$$3d = 2a$$

$$\therefore a_4 : a_7 = (a + 3d) : (a + 6d)$$

$$= (a + 2a) : (a + 4a) = 3a : 5a$$

$$= 3 : 5$$

13. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 제 n 항까지의 합을 각각 A_n , B_n 이라 한다.
 $A_n : B_n = (3n + 6) : (7n + 2)$ 일 때, $a_7 : b_7$ 을 구하면? (단, n 은 자연수)

① 5 : 17

② 15 : 31

③ 17 : 9

④ 31 : 15

⑤ 49 : 50

해설

a_n 의 일반항을 $a + (n - 1)d_1$

b_n 의 일반항을 $b + (n - 1)d_2$ 로 놓으면

$$A_n = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d_1\},$$

$$B_n = \frac{n}{2} \{2b + (n - 1)d_2\}$$

$$\frac{2a + d_1n - d_1}{2b + d_2n - d_2} = \frac{3n + 6}{7n + 2} = \frac{3kn + 6k}{7kn + 2k},$$

$d_1 = 3k$, $2a - d_1 = 6k$ (k 는 비례상수)

따라서 $2a = 9k$, $a = \frac{9}{2}k$

$$\therefore a_n = \frac{9}{2}k + (n - 1)3k$$

$$d_2 = 7k, 2b - d_2 = 2k, b = \frac{9}{2}k$$

$$\therefore b_n = \frac{9}{2}k + (n - 1)7k$$

$$\therefore a_7 : b_7 = \left(\frac{9}{2}k + 18k\right) : \left(\frac{9}{2}k + 42k\right)$$

$$= \frac{45}{2}k : \frac{93}{2}k = 15 : 31$$

14. 어떤 관광버스가 갈 때는 a km/h의 속력으로, 올 때는 b km/h의 속력으로 운행하였다. 이때, 이 버스가 왕복 운행하는 동안의 평균 속력은?

① $\frac{ab}{a+b}$

② $\frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{2b}{2(a+b)}$

④ $\frac{2ab}{2(a+b)}$

⑤ $\frac{2(a+b)}{ab}$

해설

버스가 운행하는 두 지점 사이의 거리를 s km라고 하면 왕복거리는 $2s$ km이고, 갈 때는 $\frac{s}{a}$ 시간, $\frac{s}{b}$ 시간이 걸리므로 구하는 평균

속력을 v 라고 하면

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{a} + \frac{s}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

15. 첫째항이 2009이고 공차 d 가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. $S_{402} \times S_{403} < 0$ 일 때, $a_n \times a_{n+1} < 0$ 을 만족하는 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

$$S_{402} \times S_{403} < 0 \text{에서 } S_{402} > 0, S_{403} < 0$$

$$S_{402} = \frac{402}{2}(2 \times 2009 + 401d) > 0$$

$$\therefore d > -10. \dots$$

$$S_{403} = \frac{403}{2}(2 \times 2009 + 402d) < 0$$

$$\therefore d < -9. \dots$$

d 는 정수이므로 $d = -10$ 이다.

따라서 $a_n = 2009 + (n-1) \times (-10)$

$a_n < 0$ 인 최초의 n 을 구하면

$$a_n = 2009 + (n-1) \times (-10) < 0$$

$$\therefore n > 201.9$$

따라서 $n \leq 201$ 이면 $a_n > 0$, $n \geq 202$ 이면 $a_n < 0$ 이므로

$a_n \times a_{n+1} < 0$ 을 만족하는 n 의 값은 201이다.

16. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같을 때, $a_{200} - a_{100}$ 의 값은?

$$a_n = 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$$

① $2^{200} - 1$

② $2^{200} - 2$

③ $2^{200} - 100$

④ $2^{199} - 2^{99}$

⑤ $2^{200} - 2^{100}$

해설

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_{200} = 2^{199}$$

$$a_{100} = 2^{99}$$

$$\therefore a_{200} - a_{100} = 2^{199} - 2^{99}$$

17. 다음과 같이 나열된 수를 보고 이 수열의 여섯번째에 올 수를 구하면?

$$\frac{\sqrt{3}}{1}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{7}}{5}, \dots$$

① $\frac{\sqrt{7}}{12}$

② $\frac{\sqrt{3}}{12}$

③ $\frac{\sqrt{13}}{11}$

④ $\frac{3\sqrt{2}}{16}$

⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{18}$

해설

나열된 각 수는 분수 꼴이며,
분자는 $\sqrt{\quad}$ 의 수가 2씩 증가하는 규칙으로 나타난다.

따라서 6번째에 올 수의 분자는 $\sqrt{13}$ 이다.

분모는 2씩 증가하는 규칙으로 나타난다.

따라서 6번째에 올 수 수의 분모는 11이므로

구하는 수는 $\frac{\sqrt{13}}{11}$

18. 세 수 $\sin \theta$, $\frac{\sqrt{6}}{4}$, $\cos \theta$ 가 이 순서로 등차수열을 이루고 세 수 $\sin \theta$, $\frac{1}{2}$, $\cos \theta$ 가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\frac{\sqrt{6}}{4} \text{ 이 등차중항이므로 } \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \text{ 이 등비중항이므로 } \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ 이므로}$$

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2 - 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 4$$

19. 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수로 이루어진 수열의 첫째항부터 제 20항까지의 합은?

① 2250

② 2500

③ 2750

④ 3000

⑤ 3250

해설

4로 나눈 나머지가 3인 자연수는 $4l - 1$ (단, $l \geq 0$ 인 정수)의 꼴이고,

6으로 나눈 나머지가 5인 자연수는 $6m - 1$ (단, $m \geq 0$ 인 정수)의 꼴이다.

따라서, 4로 나눈 나머지가 3이고, 6으로 나눈 나머지가 5인 자연수를 x 라고 하면

$$x = 4l - 1 = 6m - 1 \text{ 을 만족해야 하므로 } x + 1 = 4l = 6m$$

즉, $x + 1 = 12n$, 즉, $x = 12n - 1$ ($n \geq 1$ 인 정수)

따라서 조건을 만족하는 수열은 11, 23, 35, ... 로 첫째항이 11, 공차가 12인 등차수열이므로 첫째항부터 제 20항까지의 합은

$$\frac{20(2 \cdot 11 + 19 \cdot 12)}{2} = 2500$$

20. 1부터 99까지의 홀수 중 서로 다른 10개를 택하여 그들의 합을 S 라 하자. 이러한 S 의 값 중 서로 다른 것을 작은 수부터 차례로 a_1, a_2, a_3, \dots 이라 할 때, a_{100} 의 값은?

① 268

② 278

③ 288

④ 298

⑤ 308

해설

a_1, a_2, a_3, \dots 은 공차가 2인 등차수열

$$a_1 = 1 + 3 + \dots + 19 = \frac{10 \times 20}{2} = 100$$

$$\begin{aligned} a_{100} &= 100 + (100 - 1) \times 2 \\ &= 100 + 198 = 298 \end{aligned}$$