1. 등식 $\left(\dfrac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\dfrac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

$$(\text{좌변})=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$$
$$=\frac{6-7i}{3}=2-\frac{7}{3}i$$ 이므로

$2-\dfrac{7}{3}i=a+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=2,\ b=-\dfrac{7}{3}$

$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\dfrac{7}{3}\right)=2+7=9$

2. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-y^2=2 \\ x-y=1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

해설

$\begin{cases} x^2-y^2=2 \cdots ㉠ \\ x-y=1 \cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 $y=x-1$로 변형하여
㉠에 대입하면
$x^2-(x-1)^2=x^2-x^2+2x-1=2$
$2x=3$
$\therefore\ x=\frac{3}{2},\ y=\frac{1}{2}$

3. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7 + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^8$ 을 간단히 하면?

① 0 ② $1-i$ ③ $1+i$ ④ $-2i$ ⑤ $2i$

해설

$\frac{1+i}{1-i} = \frac{2i}{2} = i$, $\frac{1-i}{1+i} = \frac{1}{i} = -i$

$\therefore$ (준식) $= (i)^7 + (-i)^8 = -i + 1$

4. 이차방정식 $x^2+2(k-m)x+(k^2-n+4)=0$이 실수 k값에 관계없이 중근을 가질 때, 실수 $m+n$의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

중근을 가지려면 판별식이 0이다.
$D'=(k-m)^2-(k^2-n+4)=0$
모든 k에 대해 성립하려면
$-2m=0$, 그리고 $m^2+n-4=0$
$\therefore m=0,\quad n=4,\quad m+n=4$

5. 이차방정식 $x^2 - 8x + 15 = 0$의 두 근의 차는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$x^2 - 8x + 15 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때,
$\alpha + \beta = 8$, $\alpha\beta = 15$
따라서 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$
$= 64 - 15 \times 4 = 64 - 60 = 4$
따라서 두 근의 차는 2

6. 조건 $x^2 - 2kx + k^2 + 2k + 3 = 0$ 의 두 근의 차가 2 를 만족하는 실수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

두 근을 α, $\alpha + 2$ 라 하면
근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \alpha + 2 = 2k & \cdots\cdots ㉠ \\ \alpha(\alpha + 2) = k^2 + 2k + 3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\alpha = k - 1$을 ㉡에 대입하면,
$(k - 1)(k + 1) = k^2 + 2k + 3$
$\therefore\ k = -2$

7. 복소수의 범위에서 인수분해가 옳게 된 것은?

① $x^4 + x^2 - 2 = (x+1)(x-1)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

② $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 - x + 1)$

③ $x^2 - 2x - 1 = (x - 1 - \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$

④ $x^2 + 2x + 3 = (x + 1 - 2i)(x + 1 + 2i)$

⑤ $x^4 - 4 = (x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)$

해설

① $(x^2+2)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x^2+2)$
$= (x+1)(x-1)(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i) \rightarrow (\bigcirc)$

② $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$

③ $x^2 - 2x - 1 = (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$

④ $x^2 + 2x + 3 = (x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

⑤ $x^4 - 4$
$= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}i)(x+\sqrt{2}i)$

8. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 직선 $y = 0$과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 x축 $(y = 0)$과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D = a^2 - 12 > 0$에서
$a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$
따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

9. 축의 방정식이 $x = 3$ 이고, 점 $(2,\ 5)$ 를 지나고, y 절편이 37 인 이차함수의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

축의 방정식이 $x = 3$ 이므로
$y = a(x-3)^2 + q$
점 $(2,\ 5)$ 와 y 절편 $(0,\ 37)$ 를 지나므로
$5 = a + q,\ 37 = 9a + q$
$a = 4,\ q = 1$
$\therefore\ y = 4(x-3)^2 + 1$
따라서 $x = 3$ 일 때, 최솟값은 1 이다.

10. 이차함수 $y = ax^2 - 6x + c$ 는 $x = -6$ 일 때, 최댓값 3 을 가진다. 이때, ac 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{15}{2}$

해설

$y = ax^2 - 6x + c$ 는 $x = -6$ 일 때,
최댓값 3 이므로
$y = a(x+6)^2 + 3 = ax^2 + 12ax + 36a + 3$
$12a = -6$, $36a + 3 = c$ 이므로
$a = -\frac{1}{2}$, $-18 + 3 = c$, $c = -15$
$\therefore ac = -\frac{1}{2} \times (-15) = \frac{15}{2}$

11. 삼차방정식 $x^3+ax+b=0$의 한 근이 i일 때, 나머지 두 근을 구하여 곱하면?(단, a, b는 실수)

① $-i$　　② 0　　③ i　　④ 1　　⑤ -1

해설

$x=i$를 대입하면 $(i)^3+ai+b=0$ $(a-1)i+b=0$
$a,\ b$는 실수이므로 $a=1,\quad b=0$
$x^3+x=0,\ x(x^2+1)=0,\quad x=0,\ i,\ -i$
$\therefore$ (나머지 두 근의 곱)$=0$

12. 삼차방정식 $x^3-4x^2+x+k=0$의 한 근이 -1일 때, k의 값과 나머지 두 근의 합은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

해설

$x=-1$을 대입하면
$(-1)^3-4-1+k=0 \quad \therefore k=6$
$x^3-4x^2+x+6=0$의 나머지 두 근을 α, β라 하면
세 근의 합 $4=-1+\alpha+\beta$에서 $\alpha+\beta=5$
$\therefore k+\alpha+\beta=11$

13. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\omega^3 = 1$

② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

③ $\omega^2 = \overline{\omega}$

④ $\omega^2 + \omega = -1$

⑤ $1 + \omega^2 + \omega^4 = 1$

해설

① $\omega^3 = 1$(○)
② $\omega^2 + \omega + 1 = 0$(○)
③ $x^2 + x + 1 = 0$의 두 근이
$\omega, \overline{\omega}$이므로
$\omega + \overline{\omega} = -1$
$\overline{\omega} = -(1 + \omega) = -(-\omega^2) = \omega^2$
$\therefore \overline{\omega} = \omega^2$(○)
④ $\omega^2 + \omega = -1$(○)
⑤ $1 + \omega^2 + (\omega^3) \cdot \omega = \omega^2 + \omega + 1 = 0 \neq 1$(×)

14. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 z라 한다. $p = \dfrac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p \cdot \overline{p}$ 의 값을 구하면?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이 $z,\ \overline{z}$ 이므로

$z + \overline{z} = 1,\ z\overline{z} = 1$

$$\begin{aligned} 7p \cdot \overline{p} &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\overline{\frac{1+z}{3-z}}\right) \\ &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\frac{1+\overline{z}}{3-\overline{z}}\right) \\ &= 7\left\{\frac{1+(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}{9-3(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}\right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

15. $x^2+xy+ay^2+x+y-2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2+xy+ay^2+x+y-2$

$=x^2+(y+1)x+ay^2+y-2$가

x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$D=(y+1)^2-4(ay^2+y-2)$

$\quad=y^2+2y+1-4ay^2-4y+8$

$\quad=(1-4a)y^2-2y+9$에서

$\frac{D}{4}=1-9(1-4a)=0$

$\therefore\ 1-9+36a=0$

$\therefore\ a=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

16. 실수 $x,\ y$에 대하여 $2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$일 때, xy 의 값은?

① -6　② -3　③ 0　④ 3　⑤ 6

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy + 2x - 2y + 5 = 0$ 을
x 에 대한 내림차순으로 정리하면
$2x^2 + 2(y+1)x + y^2 - 2y + 5 = 0 \quad \cdots$ ㉠
이 때, x 는 실수이므로 ㉠은 실근을 가져야 한다.
$D = (y+1)^2 - 2\left(y^2 - 2y + 5\right) \geq 0$
$-y^2 + 6y - 9 \geq 0 \ \ (y-3)^2 \leq 0$
$\therefore y = 3$
$y = 3$을 ㉠에 대입하면
$2x^2 + 8x + 8 = 0,\ x^2 + 4x + 4 = 0$
$(x+2)^2 = 0$
$\therefore\ x = -2 \ \therefore\ xy = (-2) \cdot 3 = -6$

17. 이차방정식 $x^2+(a+2)x+2a+4=0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(a+2)$, $\alpha\beta=2a+4$ 이므로

$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$=(a+2)^2-(2a+4)=a^2+2a=(a+1)^2-1$

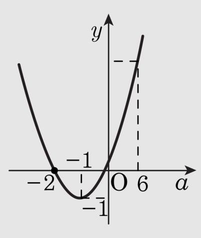
또한, 주어진 이차방정식이 실근을 가지므로

$D=(a+2)^2-4(2a+4)\geq 0$

$a^2-4a-12\geq 0$, $(a+2)(a-6)\geq 0$

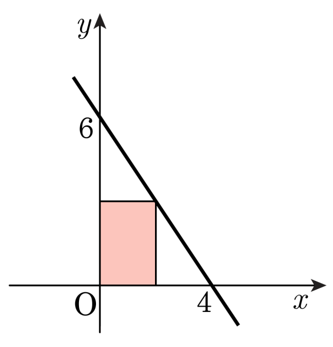
$\therefore a\leq -2$, $a\geq 6$

따라서, $y=(a+1)^2-1$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다.



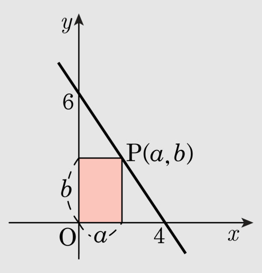
그러므로 $a=-2$ 일 때$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$ 의 최솟값은 0 이다.

18. 다음 그림과 같이 직사각형의 두 변이 x 축, y 축 위에 있고, 네 꼭짓점 중 하나는 직선 $3x+2y=12$ 위에 있다. 이 직사각형의 넓이가 최대일 때, 네 변의 길이의 합은?



① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 16

해설



직사각형의 가로 a , 세로 b라 하면 $a>0$, $b>0$

$P(a,\ b)$는 직선 $3x+2y=12$ 위의 점이므로

$3a+2b=12$

$b=6-\frac{3}{2}a$, $a>0$, $b=6-\frac{3}{2}a>0$, $a<4$

$\therefore 0<a<4$

또 직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$S=ab=a(6-\frac{3}{2}a)=-\frac{3}{2}a^2+6a$$
$$=-\frac{3}{2}(a^2-4a)=-\frac{3}{2}(a-2)^2+6$$

(단, $0<a<4$)

$a=2$일 때, 최댓값 6을 갖고

이 때, $b=6-\frac{3}{2}a=3$이다.

이 때, 직사각형 네 변의 길이의 합은 $2(a+b)=10$

19. 거듭제곱에 대한 설명 중 옳은 것은?

① $\sqrt[4]{81} = \pm 3$

② $\sqrt[3]{-64} = -8$

③ 16의 네제곱근은 ± 2이다.

④ $\sqrt{(-3)^2}$의 제곱근은 3이다.

⑤ -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다.

해설

① $\sqrt[4]{81} = \sqrt{9} = 3$ $\therefore$ 거짓

② $\sqrt[3]{-64} = \sqrt[3]{(-4)^3} = -4$ $\therefore$ 거짓

③ 16의 네제곱근은 ± 2, $\pm 2i$이다. $\therefore$ 거짓

④ $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$의 제곱근은 $\pm\sqrt{3}$이다. $\therefore$ 거짓

⑤ $(-1)^3 = -1$이므로 -1은 -1의 세제곱근 중 하나이다. $\therefore$ 참

20. $a > 0$이고 $m,\ n,\ p$가 2이상의 정수일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

② $\sqrt[2p]{a^{mp}} = \sqrt{a^m}$

③ $(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = \sqrt{a^{mn}}$

④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = a^{\frac{1}{mn}}$

⑤ $\dfrac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = a^{-\frac{n}{m}}$

해설

$(\sqrt[n]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{a})^n = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{n}{m}} = a^{\frac{m^2+n^2}{mn}}$

21. $\dfrac{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{6}}$ 을 간단히 하면?

① $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ② $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ ③ $\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ ④ $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{3}}$ ⑤ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6}}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{6}} &= \frac{\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}+\sqrt[3]{3\cdot 2}} \\ &= \frac{2+\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{2+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2}(2+\sqrt[3]{3})} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{aligned}$$

22. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 의 값이 존재하기 위한 실수 x 의 범위는?

① $-1 < x < 3$　② $0 > x$　③ $2 < x < 5$
④ $3 < x < 4$　⑤ $5 < x < 7$

해설

밑의 조건에서 $x-3>0,\ x-3 \neq 1$
따라서 $x>3,\ x \neq 4 \cdots$ ㉠
진수의 조건에서 $-x^2+6x-8>0$
$x^2-6x+8<0$
$(x-2)(x-4)<0$
따라서 $2<x<4 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 의 공통범위를 구하면 $3<x<4$

23. $\log_a 27 = -2, \log_{\sqrt{3}} b = 3$ 일때, ab 의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$\log_a 27 = -2$ 에서 $a^{-2} = 27 = 3^3$

$\therefore a = 3^{-\frac{3}{2}} (\because a > 0)$

$\log_{\sqrt{3}} b = 3$ 에서 $b = (\sqrt{3})^3 = (3^{\frac{1}{2}})^3 = 3^{\frac{3}{2}}$

$\therefore ab = 3^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} = 3^0 = 1$

24. $\log_2 12 = a$일 때, $\log_3 6$을 a로 나타내면?

① $\dfrac{a-1}{a-2}$ ② $\dfrac{a}{a-2}$ ③ $\dfrac{a}{a-1}$ ④ $\dfrac{a+1}{a-1}$ ⑤ $\dfrac{a+2}{a}$

해설

$\log_2 12 = \log_2(2^2 \times 3) = 2 + \log_2 3$

즉, $2 + \log_2 3 = a$이므로 $\log_2 3 = a - 2$

$\therefore \log_3 6 = \dfrac{\log_2 6}{\log_2 3} = \dfrac{\log_2(2\times 3)}{\log_2 3}$

$= \dfrac{1+\log_2 3}{\log_2 3} = \dfrac{1+(a-2)}{a-2} = \dfrac{a-1}{a-2}$

25. $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ 을 이용하여 $\log_{10} 2.25$ 의 값을 계산하면?

① 0.1661 ② 0.1761 ③ 0.1771
④ 0.3522 ⑤ 0.5283

해설

$\log_{10} 2.25 = \log_{10}(3^2 \times 5^2 \div 100)$
$= 2\log 3 + 2(1 - \log 2) - 2$
$= 0.3522$