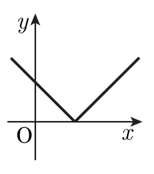
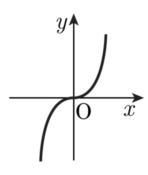
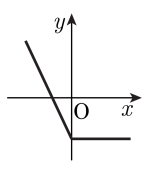
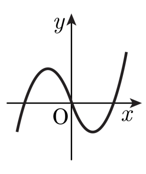
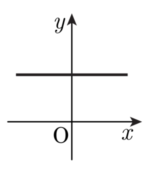
1. 다음 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 중 역함수가 존재하는 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

①, ③, ④, ⑤ 는 일대일 대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

2. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ② $y = \frac{1}{2}x + 1$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x + 2$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

해설

$y = 2x - 2$ 를 x 에 대하여 풀면

$x = \frac{1}{2}y + 1$ x 와 y 를 바꾸면 구하는 역함수는

$\therefore\ y = \frac{1}{2}x + 1$

3. 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$ 에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$ 일 때, 상수 a 의 값은 얼마인가?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f^{-1}(-7) = 2$ 이므로
역함수의 정의에 의해서
$f(2) = -7$, $f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7$, $3a = -9$
$\therefore a = -3$

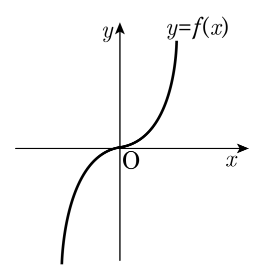
4. 함수 $f(x)=2x-5$ 의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-3)$ 의 값은 얼마인가?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

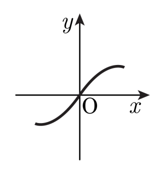
해설

$f(x)=y=2x-5$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x=2y-5$
$x=2y-5$ 를 y 에 대하여 정리하면
$y=\dfrac{1}{2}(x+5)$
$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(x+5)$
$\therefore f^{-1}(-3)=1$
|다른풀이| $f^{-1}(-3)=a$ 로 놓으면
$f(a)=-3$ 에서 $f(a)=2a-5=-3$, $2a=2$
$\therefore a=f^{-1}(-3)=1$

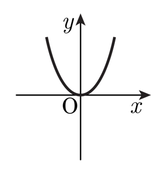
5. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 다음 중 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프로 적당한 것은 무엇인가?



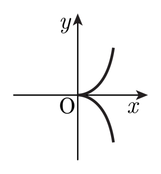
①



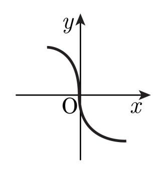
②



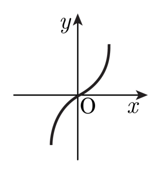
③



④



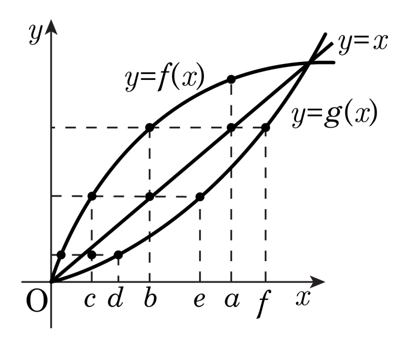
⑤



해설

$y = f(x)$ 의 그래프와
그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

6. 다음 그림은 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=x$의 그래프이다. 이때, $(f\circ f\circ g)^{-1}(a)$의 값은?



① a　　② b　　③ c　　④ d　　⑤ e

해설

$(f\circ f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1}\cdots\cdots$㉠이고

$f^{-1}(a)=k$라 하면 $f(k)=a$에서 $k=b$

$\therefore\ f^{-1}(a)=b\cdots\cdots$㉡

$f^{-1}(b)=l$이라 하면 $f(l)=b$에서 $l=c$

$\therefore\ f^{-1}(b)=c\cdots\cdots$㉢

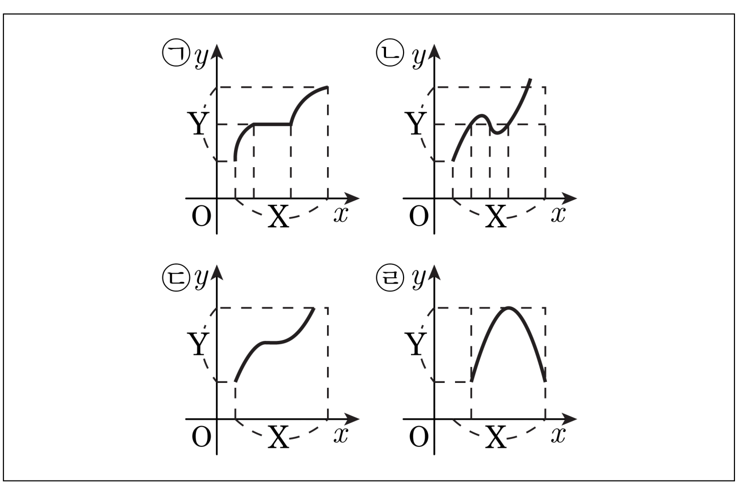
$g^{-1}(c)=m$이라 하면 $g(m)=c$에서 $m=d$

$\therefore\ g^{-1}(c)=d\cdots\cdots$㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ g)^{-1}&=(g^{-1}\circ f^{-1}\circ f^{-1})(a)\\&=g^{-1}[f^{-1}\{f^{-1}(a)\}]\\&=g^{-1}\{f^{-1}(b)\}=g^{-1}(c)=d\end{aligned}$$

7. 함수 $f : X \to Y$ 의 그래프가 다음과 같다고 한다. 이 중에서 역함수가 존재하는 것은?

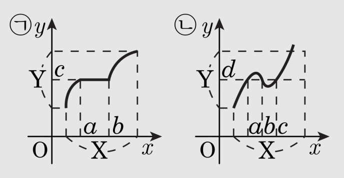


① ㉠, ㉢　　② ㉡, ㉣　　③ ㉢

④ ㉠　　⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

X 에서 Y 로의 일대일대응을 찾으면 된다.

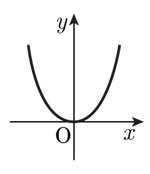


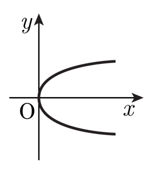
㉠ : $\{x | a \le x \le b\}$ 에 속하는 x 의 상이 모두 c 이므로 일대일대응이 아니다.

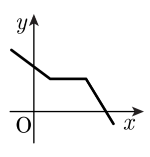
㉡ : a, b, c 의 상이 모두 d 이므로 일대일 대응이 아니다.

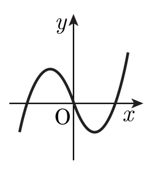
㉣ : ㉡의 경우와 같다.

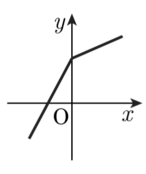
8. 다음 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프로서 적당한 것은 무엇인가?

①


②


③


④


⑤


해설

주어진 그래프 중 일대일대응인 것을 찾으면 ⑤이다.

9. 두 함수 $f(x) = x+2$, $g(x) = 2x-3$일 때, 합성함수 $g \circ f$의 역함수 $(g \circ f)^{-1}(x)$를 구하면 무엇인가?

① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$　② $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　③ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$　⑤ $y = \frac{1}{2}x + 1$

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x+2) \\ &= 2(x+2) - 3 = 2x+1\end{aligned}$$

합성함수 $g \circ f$는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.
$y = 2x+1$로 놓고 x에 대하여 풀면
$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2}$ 이 된다.
따라서, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 이다.

10. 두 함수 f, g 가 일대일대응일 때, 다음 중 $g \circ (f \circ g)^{-1}$ 와 같은 것을 고르면?

① f　　② f^{-1}　　③ g
④ g^{-1}　　⑤ $g \circ f^{-1}$

해설

$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} g \circ (f \circ g)^{-1} &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \\ &= f^{-1} \end{aligned}$$

11. 두 함수 $f(x)=2x-5, g(x)=-x+3$ 에 대하여 $(f^{-1}\circ g^{-1})(2)$ 의 값은 얼마인가?

① 3　② $-\frac{5}{2}$　③ -1　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 3

해설

$f(x)=2x-5, g(x)=-x+3$ 에 대하여
$(f^{-1}\circ g^{-1})(2)=f^{-1}(g^{-1}(2))$ 이므로
$g^{-1}(2)=k$ 로 놓으면 $g(k)=2$
$-k+3=2$ 에서 $k=1$
$(f^{-1}\circ g^{-1})(2)=f^{-1}(1)=m$ 으로 놓으면,
$f(m)=1$ 에서 $2m-5=1$
$\therefore m=3$

12. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수

$f(x)=\begin{cases} x+k & (x \geq 0) \\ -x+k & (x<0) \end{cases}$ 가 $f^{-1}(2)=-3$ 을 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값은 얼마인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$f^{-1}(2)=-3$ 에서 $f(-3)=2$ 이므로

$f(-3)=3+k=2$

$\therefore\ k=-1$ 이므로 $f(x)=\begin{cases} x-1 \ (x \geq 0) \\ -x-1 \ (x<0) \end{cases}$

$\therefore\ f(5)=5-1=4$

13. 함수 $f(x) = kx + 1$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?
(단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4　　② 3　　③ 2　　④ -1　　⑤ -2

해설

f^{-1} 이므로 $f \circ f = \mathrm{I}$
$(f \circ f)(x) = x$에서
$f(f(x)) = f(kx+1) = k(kx+1) + 1 = k^2x + k + 1 = x$
$\therefore\ k^2 = 1,\ k + 1 = 0$ 따라서 $k = -1$

14. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)$ 가 존재하고 $f^{-1}(3) = 1$, $(f \circ f)(x) = x$ 일 때, $f(3)$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(f \circ f)(x) = x$ 에서 $f = f^{-1}$
따라서 $f(3) = f^{-1}(3) = 1$

15. 점 $P(1,\ 2)$ 는 함수 $y=\ \sqrt{ax+b}\ (a \neq 0)$ 의 그래프 위에 있고, 또 그 역함수의 그래프 위에도 있다고 한다. ab 의 값은 ?

① 20　② -20　③ -21　④ 21　⑤ 24

해설

점 $P(1,\ 2)$ 가 $y=\ \sqrt{ax+b}$ 의 그래프 위에 있으므로 $\sqrt{a+b}=2$
$\therefore a+b=4\cdots$ ㉠
점 $P(1,\ 2)$ 가 $y=\ \sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 그래프 위에 있으므로
점 $(2,1)$ 이 $y=\ \sqrt{ax+b}$ 위에 있다.
즉, $\sqrt{2a+b}=1$
$\therefore 2a+b=1\cdots$ ㉡
㉠, ㉡ 에서 $a=-3,\ b=7$
$\therefore ab=-21$

16. 함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 에 대하여 $f(g(x))=g(f(x))=x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$　　② $g(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$

③ $g(x)=\dfrac{-2x+1}{x-2}$　　④ $g(x)=\dfrac{-2x-1}{x-2}$

⑤ $g(x)=\dfrac{x-2}{-2x-1}$

해설

$f(g(x))=g(f(x))=x$ 에서 $g=f^{-1}$ 이므로

$g(x)$ 는 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 의 역함수이다.

$(x+2)y=2x-1$, $x(y-2)=-2y-1$

$x=\dfrac{-2y-1}{y-2}$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{-2x-1}{x-2}$

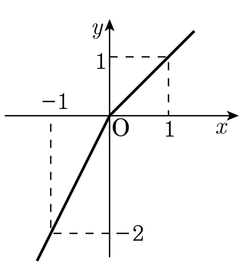
17. 일차함수 $f(x)=ax+b$ 에 대하여 $f(1)=5$,$f^{-1}(7)=2$ 가 성립할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?(단, f^{-1} 은 f 의 역함수이고, a,b 는 상수)

① 3 ② 2 ③ 1 ④ 0 ⑤ −1

해설

$f(1)=5$ 에서
$a+b=5 \cdots$ ①
$f^{-1}(7)=2 \Leftrightarrow f(2)=7$ 에서
$2a+b=7 \cdots$ ②
①, ②를 연립하면 $a=2,\ b=3$
$\therefore\ a-b=-1$

18. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 원점과 두 점 $(1,1),(-1,-2)$ 를 각각 지나는 두 반직선으로 이루어져 있다. 이 때, [보기] 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

㉠ $f(10)=f(f(10))$

㉡ $f^{-1}(-2)=-1$

㉢ $y=f(x)$ 의 그래프와 $f(x)$ 의 역함수 $y=f^{-1}(x)$ 의 그래프의 교점은 두 개뿐이다.

① ㉠　　② ㉢　　③ ㉠,㉡

④ ㉡,㉢　　⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

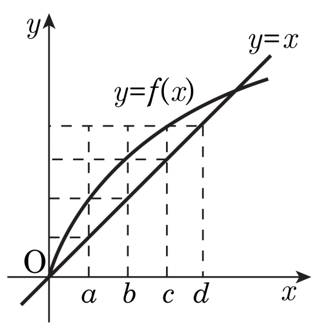
㉠ $f(10)=10$
$f(f(10))=f(10)=10$
$\therefore f(10)=f(f(10))$ (참)

㉡ $f(-1)=-2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2)=-1$ (참)

㉢ $y=f^{-}1(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.

따라서 $y=f(x)$ 와 $y=f^{-1}(x)$ 는
무수히 많은 점에서 만난다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡ 이다.

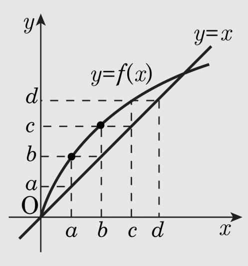
19. $y=f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $b+f(b)+f^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



① b　　② $b+d$　　③ $2b+c$

④ $b+c+d$　　⑤ $a+b+c$

해설



그림에서 $f(b)=c,\ f^{-1}(b)=a$ 이므로

$b+f(b)+f^{-1}(b)=b+c+a$

20. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x)=1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x<1) \end{cases}$ 에서

$(f^{-1} \circ f^{-1})(x)=(f \circ f)^{-1}(x)=1$

$(f \circ f)(1)=(f(f(1))=f(0)=-1$

$\therefore\ x=-1$