

1. $x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

2. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$ 의 두 근의 합은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$$-a = 2 + 3, a = -5$$

$$b = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\therefore -5x^2 + 6x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$\text{두 근의 합은 } \frac{6}{5}$$

3. 함수 $y = \frac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 의 최댓값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x^2 - 2x + 4 = (x - 1)^2 + 3 > 0$ 이므로

분모가 최소가 될 때 y 가 최대이다.

$\therefore x = 1$ 일 때 최댓값 $\frac{6}{3} = 2$

4. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1 < 5 \\ 5-x \leq a+3 \end{cases}$ 이 해를 가질 때, a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < 5$

② $a \leq 5$

③ $a > -1$

④ $a < -1$

⑤ $a \geq -1$

해설

i) $2x-1 < 5, x < 3$

ii) $5-x \leq a+3, x \geq 2-a$

$2-a < 3$

$\therefore a > -1$

5. 직선 $x-2y+4=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식은?

- ① $x+2y+4=0$ ② $x+2y-4=0$ ③ $x-2y-4=0$
④ $2x-y+4=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

원점대칭은 x, y 부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$ 를 대입한다.

6. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 $X \subset A$, $A - X = \{1, 3\}$ 을 만족하는 집합 X 의 진부분집합의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 15개

해설

$$2^{5-2} - 1 = 7(\text{개})$$

7. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 개수는?

① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1, 0, 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4개씩이므로
 $4 \times 4 \times 4 = 64$ (개)

8. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$

9. $\frac{2004^3 - 2003^3 - 1}{2003 \times 2004}$ 의 값을 구하면?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

2003 = x 라 두면 $2004 = x + 1$

$$\text{(준 식)} = \frac{(x+1)^3 - x^3 - 1}{x(x+1)}$$

$$= \frac{3x(x+1)}{x(x+1)} = 3$$

10. 세 다항식 $f(x) = x^2 + x - 2$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $h(x) = x^2 + mx + 8$ 의 최대공약수가 x 의 일차식일 때, m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 6$

해설

$f(x) = (x + 2)(x - 1)$
 $g(x) = (x + 2)(2x - 1)$ 이므로
 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최대공약수는 $x + 2$
이것이 $h(x)$ 의 약수이어야 하므로
 $h(-2) = 4 - 2m + 8 = 0$
 $\therefore m = 6$

11. $(i-1)x^2 - 3(a+i)x + (5+2i) = 0$ 이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값을 α, β 라 할 때, $\alpha - \beta$ 의 값을 구하면($\alpha > \beta$) ?

① $\frac{7}{6}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{3}{2}$

④ $\frac{5}{3}$

⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$$(i-1)x^2 - 3(a+i)x + (5+2i) = 0$$

$$(-x^2 - 3ax + 5) + (x^2 - 3x + 2)i = 0$$

$$-x^2 - 3ax + 5 = 0 \cdots \textcircled{a}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \cdots \textcircled{b}$$

⑥을 인수분해하면,

$$(x-1)(x-2) = 0, \therefore x = 1, 2$$

⑥에 대입하면,

$$x = 1 \text{ 일 때, } -1 - 3a + 5 = 0, \therefore a = \frac{4}{3}$$

$$x = 2 \text{ 일 때, } -4 - 6a + 5 = 0, \therefore a = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \alpha = \frac{4}{3}, \beta = \frac{1}{6} (\because \alpha > \beta)$$

$$\therefore \alpha - \beta = \frac{4}{3} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

12. 연립부등식 $\begin{cases} -\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq -2.5 \\ ax + 4 \geq x \end{cases}$ 의 해가 $x = 2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$-\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq -2.5$$

$$x + \frac{1}{2} \geq \frac{5}{2}$$

$$x \geq 2$$

해가 $x = 2$ 이기 위해서는 다음 부등식의 해는 $x \leq 2$ 이어야 하므로

$$ax + 4 \geq x$$

$$(a - 1)x \geq -4$$

$$x \leq \frac{-4}{a - 1}$$

$$\frac{-4}{a - 1} = 2$$

$$-4 = 2a - 2$$

$$-2a = 2$$

$$\therefore a = -1$$

13. x, y 가 실수일 때, 다음 중에서 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요충분인 것은?

- ① $p : x + y \geq 2, q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$
- ② $p : x + y$ 는 유리수이다., $q : x, y$ 는 유리수이다.
- ③ $p : xy > x + y > 4, q : x > 2$ 이고 $y > 2$
- ④ $p : xy + 1 > x + y > 2, q : x > 1$ 이고 $y > 1$
- ⑤ $p : xyz = 0, q : xy = 0$

해설

- ① $p : x + y \geq 2 \Rightarrow q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (반례 : $x = 2, y = -1$)
- ② $p : x + y$ 는 유리수이다. $\Rightarrow q : x, y$ 는 유리수이다. (반례 : $x = 1 - \sqrt{2}, y = 1 + \sqrt{2}$)
- ③ $p : xy > x + y > 4 \Rightarrow q : x > 2$ 이고 $y > 2$ (반례 : $x = 4, y = 2$)
- ④ $p : xy + 1 > x + y > 2 \Leftrightarrow q : x > 1$ 이고 $y > 1$
- ⑤ $p : xyz = 0 \Rightarrow q : xy = 0$ (반례 : $x = 1, y = 1, z = 0$)

14. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x \text{가 유리수}) \\ 2x & (x \text{가 무리수}) \end{cases} \text{ 일 때,}$$

$f(x) - f(x-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(i) x 가 유리수일 때, $x-1$ 도 유리수이므로

$$\begin{aligned} f(x) - f(x-1) &= 2x-1 - \{2(x-1) - 1\} \\ &= 2x-1 - (2x-3) = 2 \end{aligned}$$

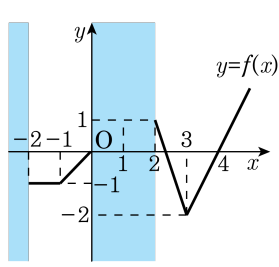
(ii) x 가 무리수일 때, $x-1$ 도 무리수이므로

$$f(x) - f(x-1) = 2x - 2(x-1) = 2$$

따라서 (i),(ii)에서 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) - f(x-1) = 2$$

15. 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$ 에 대한 설명이다. M, N 의 합을 구하여라.



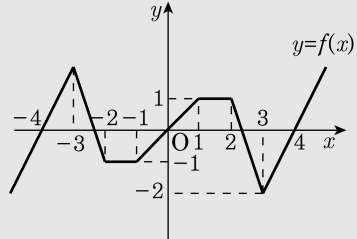
$-4 \leq x \leq -2$ 일 때, $f(x)$ 의 최댓값은 M 이고, $0 \leq x \leq 2$ 일 때, $f(x)$ 의 최댓값은 N 이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x 에 대하여 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키므로 주어진 함수는 기함수 즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면 다음 그림과 같으므로



$-4 \leq x \leq -2$ 일 때,
 $f(x)$ 의 최댓값 $M = 2$ 이고,
 $0 \leq x \leq 2$ 일 때,
 $f(x)$ 의 최댓값 $N = 1$ 이다.
 $\therefore M + N = 3$

16. 다음 식이 성립하는 실수 x 의 최솟값을 구하라.

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$ 가 성립되지 않는 범위는 $x+1 < 0$ 이고 $x-2 < 0$

$\therefore x < -1$

따라서 $x < -1$ 일 때, 위의 등식이 성립되지 않는다.

$\{x \mid x < -1\}$ 의 여집합 되어야 하므로

$\{x \mid x \geq -1\}$ 이고 실수 x 의 최솟값은 $\therefore -1$

17. x, y 는 실수이고 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}}$ 일 때, $\sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x$

해설

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}} \text{ 이 성립하므로 } y < 0, x \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2} \\ &= |y-x| + x-y - 2|y| \\ &= -y+x+x-y+2y=2x \end{aligned}$$

18. 세 변의 길이가 a, b, c 인 $\triangle ABC$ 에 대하여 $a^2 - ab + b^2 = (a + b - c)c$ 인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$ 는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$$a^2 - ab + b^2 = (a + b - c)c \text{에서 } a^2 - ab + b^2 = ac + bc - c^2$$

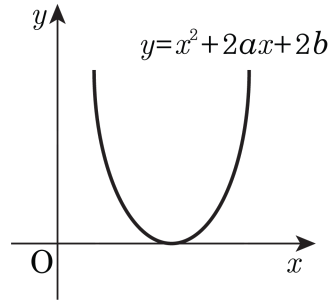
$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \left\{ (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \right\} = 0$$

$$\therefore a = b = c$$

따라서, $\triangle ABC$ 는 정삼각형이다.

19. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



- ① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.
- ② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.
- ③ 중근을 갖는다.
- ④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.
- ⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b - 1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

20. 점 $(1, -1)$ 에서 직선 $ax + by = 0 (a \neq 0, b \neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 a, b 의 관계를 바르게 설명한 것은?

- ① $a - b = 0$
- ② $a - b = \sqrt{2}$
- ③ $a + b = 0$
- ④ $ab = 0$
- ⑤ $ab = \sqrt{2}$

해설

$$\frac{|a \times 1 + b \times (-1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{2}$$

$$|a - b| = \sqrt{2} \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{양변을 제곱하면 } a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 0, (a + b)^2 = 0$$

$$\text{따라서 } a + b = 0$$

21. 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 5$

해설

$x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x - 2y - 3 = 0$ (x 축 대칭이동)
 $\Rightarrow y - 2x - 3 = 0$ ($y = x$ 대칭이동)
원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.
따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.
 $\therefore a - 2 - 3 = 0 \quad \therefore a = 5$

22. 다음은 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$ 을 만족하는 두 양수 x, y 에 대하여 $x+y$ 의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{4}{y}} \cdots \textcircled{㉠}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{xy}}$$
$$\therefore \sqrt{xy} \geq 4 \cdots \textcircled{㉡}$$
$$\therefore x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2 \cdot 4 = 8 \cdots \textcircled{㉢}$$

따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이다.㉣

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉣
- ⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

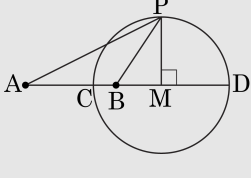
㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x} = \frac{4}{y}$
즉 $y = 4x$ 일 때이고,
㉡에서 등호가 성립하는 경우는
 $x = y$ 일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$ 의 최솟값은 8이 될 수 없다.

23. 두 점 A (1,1), B (7,4) 에서 이르는 거리의 비가 2 : 1 인 임의의 점 P 에 대하여 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대일 때, $\tan(\angle PAB)$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

점 P 의 자취는 선분 AB 를 2 : 1 로
내분하는 점 C와 2 : 1 로 외분하는 점
D 를



자침의 양 끝으로 하는 원이다.

점 C 의 좌표는

$$\left(\frac{14+1}{2+1}, \frac{8+1}{2+1}\right), \text{ 즉 } C(5,3)$$

점 D 의 좌표는

$$\left(\frac{14-1}{2-1}, \frac{8-1}{2-1}\right) \text{ 즉, } D(13,7)$$

따라서, CD 의 중점 M 의 좌표는

$$\left(\frac{5+13}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$$

즉, M (9,5) 이므로

$$\overline{CM} = \sqrt{(9-5)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서, 점 P 의 자취는 중심의 좌표가

(9,5) 이고 반지름의 길이가

$2\sqrt{5}$ 인 원이므로 자취의 방정식은

$$(x-9)^2 + (y-5)^2 = 20$$

그런데 다음 그림에서 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대인

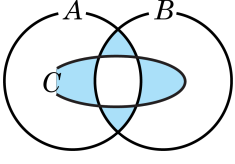
경우는 선분 AM 과 선분 PM 이 수직인 경우이다.

$$\text{이 때, } \overline{AM} = \sqrt{(9-1)^2 + (5-1)^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\overline{PM} = 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\tan(\angle PAB) = \tan(\angle PAM) = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

24. 다음 그림에서 $n(A) = 18, n(B) = 12, n(C) = 15, n(A \cup B) = 25, n(B \cup C) = 18, n(C \cup A) = 23$ 일 때, 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \rightarrow n(A \cap B) = 5$,
 $n(B \cup C) = 18$ 이므로, $n(C - B) = n(B \cup C) - n(B) = 18 - 12 = 6$,
 $n(C \cup A) = 23$ 이므로, $n(C - A) = n(C \cup A) - n(A) = 23 - 18 = 5$,
 $n(C) = 15$ 이므로 $n(A \cap B \cap C) = n(C) - n(C - B) - n(C - A) = 15 - 6 - 5 = 4$,
색칠한 부분은 $((A \cap B) - (A \cap B \cap C)) \cup (C - A) \cup (C - B)$,
 $n((A \cap B) - (A \cap B \cap C) \cup (C - A) \cup (C - B)) = n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) + n(C - A) + n(C - B) = 5 - 4 + 5 + 6 = 12$

25. a, b 가 양의 상수이고, x, y 가 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 을 만족하면서 변할 때, $x+y$ 의 최댓값은?

- ① a^2
- ② b^2
- ③ $\sqrt{a^2 + b^2}$
- ④ $a^2 + b^2$
- ⑤ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

해설

코시-슈바르츠 부등식
 $(a^2 + b^2) \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \geq (x + y)^2$ 은 항상 성립하므로
 $a^2 + b^2 \geq (x + y)^2 \dots\dots ①$
 $\therefore x + y \leq \sqrt{a^2 + b^2} \dots\dots ②$
①의 등호가 성립할 조건은
 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이고 $\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} \dots\dots ③$
또, ③의 등호는 $x + y \geq 0$ 일 때, 성립하므로
③을 풀면
 $x = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, y = \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 이고,
 $x + y$ 의 최댓값은 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 이다.