1. $x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^2 - x + 1$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1

④ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2 를 곱하면 $2x = 1 - \sqrt{3}i$

그러므로 $2x - 1 = -\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하면 $4x^2 - 4x + 1 = -3$

즉, $4x^2 - 4x + 4 = 0$

따라서, $x^2 - x + 1 = 0$

2. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

3. 함수 $y = \dfrac{6}{x^2 - 2x + 4}$ 의 최댓값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$ 이므로
분모가 최소가 될 때 y 가 최대이다.

$\therefore\ x = 1$ 일 때 최댓값 $\dfrac{6}{3} = 2$

4. 연립부등식 $\begin{cases} 2x-1<5 \\ 5-x \le a+3 \end{cases}$ 이 해를 가질 때, a 의 값의 범위를 구하면?

① $a<5$　② $a \le 5$　③ $a>-1$

④ $a<-1$　⑤ $a \ge -1$

해설

i) $2x-1<5$, $x<3$

ii) $5-x \le a+3$, $x \ge 2-a$

$2-a<3$

$\therefore\ a>-1$

5. 직선 $x-2y+4=0$을 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식은?

① $x+2y+4=0$ ② $x+2y-4=0$ ③ $x-2y-4=0$

④ $2x-y+4=0$ ⑤ $x-2y=0$

해설

원점대칭은 x, y부호를 각각 반대로 해주면 된다.
따라서 $x \to -x$, $y \to -y$를 대입한다.

6. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에서 $X \subset A$, $A - X = \{1, 3\}$을 만족하는 집합 X의 진부분집합의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 15개

해설

$2^{5-2} - 1 = 7$(개)

7. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수 $f : X \to Y$ 의 개수는?

① 12 개 ② 27 개 ③ 36 개 ④ 64 개 ⑤ 81 개

해설

집합 X 의 원소 $-1,\ 0,\ 1$ 에 대응될 수 있는
집합 Y 의 원소가 각각 4 개씩이므로
$4 \times 4 \times 4 = 64$(개)

8. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 a^2+b^2 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1,\quad a=-1$

$\therefore\ a=-1,\quad b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

9. $\dfrac{2004^3 - 2003^3 - 1}{2003 \times 2004}$ 의 값을 구하면?

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

해설

$2003 = x$라 두면 $2004 = x+1$

$$(\text{준 식}) = \frac{(x+1)^3 - x^3 - 1}{x(x+1)}$$

$$= \frac{3x(x+1)}{x(x+1)} = 3$$

10. 세 다항식 $f(x) = x^2 + x - 2$, $g(x) = 2x^2 + 3x - 2$, $h(x) = x^2 + mx + 8$의 최대공약수가 x의 일차식일 때, m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 6$

해설

$f(x) = (x+2)(x-1)$

$g(x) = (x+2)(2x-1)$이므로

$f(x)$와 $g(x)$의 최대공약수는 $x+2$

이것이 $h(x)$의 약수이어야 하므로

$h(-2) = 4 - 2m + 8 = 0$

$\therefore\ m = 6$

11. $(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$이 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값을 α, β라 할 때, $\alpha-\beta$의 값을 구하면$(\alpha>\beta)$?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$(i-1)x^2-3(a+i)x+(5+2i)=0$

$(-x^2-3ax+5)+(x^2-3x+2)i=0$

$-x^2-3ax+5=0\cdots$ ⓐ

$x^2-3x+2=0\cdots$ ⓑ

ⓑ을 인수분해하면,

$(x-1)(x-2)=0$, $\therefore\ x=1,\ 2$

ⓐ에 대입하면,

$x=1$일 때, $-1-3a+5=0$, $\therefore\ a=\frac{4}{3}$

$x=2$일 때, $-4-6a+5=0$, $\therefore\ a=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \alpha=\frac{4}{3}, \beta=\frac{1}{6}(\because\ \alpha>\beta)$

$\therefore\ \alpha-\beta=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$

12. 연립부등식 $\begin{cases} -\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \le -2.5 \\ ax+4 \ge x \end{cases}$ 의 해가 $x=2$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$-\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \le -2.5$

$x+\dfrac{1}{2} \ge \dfrac{5}{2}$

$x \ge 2$

해가 $x=2$ 이기 위해서는 다음 부등식의 해는 $x \le 2$ 이어야 하므로

$ax+4 \ge x$

$(a-1)x \ge -4$

$x \le \dfrac{-4}{a-1}$

$\dfrac{-4}{a-1} = 2$

$-4 = 2a-2$

$-2a = 2$

$\therefore\ a = -1$

13. x, y 가 실수일 때, 다음 중에서 조건 p가 조건 q 이기 위한 필요충분인 것은 ?

① $p : x+y \geq 2$, $q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p : x+y$는 유리수이다., $q : x$, y는 유리수이다.

③ $p : xy > x+y > 4$, $q : x > 2$ 이고 $y > 2$

④ $p : xy+1 > x+y > 2$, $q : x > 1$ 이고 $y > 1$

⑤ $p : xyz = 0$, $q : xy = 0$

해설

① $p : x+y \geq 2 \Rightarrow q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (반례 : $x = 2$, $y = -1$)

② $p : x+y$ 는 유리수이다. $\Rightarrow q : x$, y는 유리수이다. (반례 : $x = 1-\sqrt{2}$, $y = 1+\sqrt{2}$)

③ $p : xy > x+y > 4 \Rightarrow q : x > 2$ 이고 $y > 2$ (반례 : $x = 4$, $y = 2$)

④ $p : xy+1 > x+y > 2 \Leftrightarrow q : x > 1$ 이고 $y > 1$

⑤ $p : xyz = 0 \Rightarrow q : xy = 0$ (반례 : $x = 1$, $y = 1$, $z = 0$)

14. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x\text{가 유리수}) \\ 2x & (x\text{가 무리수}) \end{cases}$$ 일 때,

$f(x)-f(x-1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

(i) x가 유리수일 때, $x-1$도 유리수이므로

$f(x)-f(x-1) = 2x-1-\{2(x-1)-1\}$

$= 2x-1-(2x-3) = 2$

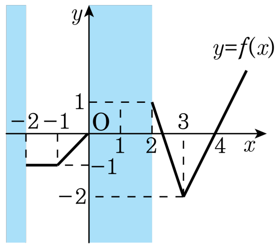
(ii) x가 무리수일 때, $x-1$도 무리수이므로

$f(x)-f(x-1) = 2x-2(x-1) = 2$

따라서 (i),(ii)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)-f(x-1) = 2$

15. 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를 만족시키는 함수 $y = f(x)$의 그래프의 일부분이 다음 그림과 같이 지워져 있다. 다음 보기는 함수 $y = f(x)$에 대한 설명이다. M, N의 합을 구하여라.



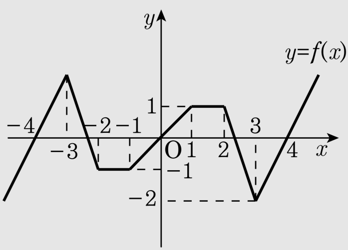
> $-4 \le x \le -2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 M이고, $0 \le x \le 2$일 때, $f(x)$의 최댓값은 N이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

모든 실수 x에 대하여 $f(-x) = -f(x)$를
만족시키므로 주어진 함수는 기함수
즉, 원점 대칭이다. 따라서 그래프를 완성하면
다음 그림과 같으므로



$-4 \le x \le -2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $M = 2$이고,
$0 \le x \le 2$일 때,
$f(x)$의 최댓값 $N = 1$이다.
$\therefore M + N = 3$

16. 다음 식이 성립하는 실수 x의 최솟값을 구하라.

$$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = \sqrt{(x+1)(x-2)}$가 성립되지 않는 범위는

$x+1<0$ 이고 $x-2<0$

$\therefore\ x<-1$

따라서 $x<-1$ 일 때, 위의 등식이 성립되지 않는다.

$\{x \mid x<-1\}$의 여집합 되어야 하므로

$\{x \mid x \geq -1\}$이고 실수 x의 최솟값은 $\therefore\ -1$

17. x, y는 실수이고 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}}$ 일 때, $\sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2x$

해설

$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = -\sqrt{\frac{x}{y}}$ 이 성립하므로 $y < 0,\ x \geq 0$

$\sqrt{(y-x)^2} + (\sqrt{x-y})^2 - 2\sqrt{y^2}$

$= |y-x| + x - y - 2|y|$

$= -y + x + x - y + 2y = 2x$

18. 세 변의 길이가 a, b, c인 $\triangle ABC$에 대하여 $a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$인 관계가 성립할 때, $\triangle ABC$는 어떤 삼각형인지 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 정삼각형

해설

$a^2-ab+b^2=(a+b-c)c$에서 $a^2-ab+b^2=ac+bc-c^2$

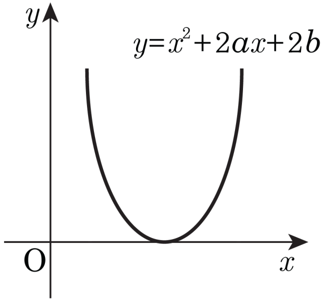
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

즉, $\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}=0$

$\therefore\ a=b=c$

따라서, $\triangle ABC$는 정삼각형이다.

19. 이차함수 $y = x^2 + 2ax + 2b$ 의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 방정식 $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$ 의 근에 대한 설명으로 옳은 것은?



① 서로 다른 양의 실근을 갖는다.

② 서로 다른 음의 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 서로 다른 부호의 실근을 갖는다.

⑤ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

해설

㉠ 그래프에서 중근이므로 $a^2 - 2b = 0$

㉡ $x^2 - 2ax + b^2 + 2 = 0$

판별식 $\frac{D}{4} = a^2 - b^2 - 2 \leftarrow a^2 = 2b$

$= 2b - b^2 - 2$

$= -(b^2 - 2b + 2)$

$= -(b-1)^2 - 1 < 0$

$\therefore$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

20. 점 $(1,\ -1)$ 에서 직선 $ax+by=0(a\neq 0,\ b\neq 0)$ 까지의 거리가 $\sqrt{2}$ 일 때, 상수 $a,\ b$ 의 관계를 바르게 설명한 것은?

① $a-b=0$ ② $a-b=\sqrt{2}$ ③ $a+b=0$

④ $ab=0$ ⑤ $ab=\sqrt{2}$

해설

$$\frac{|a\times 1+b\times(-1)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{2}$$

$|a-b|=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}$

양변을 제곱하면 $a^2-2ab+b^2=2a^2+2b^2$

$a^2+2ab+b^2=0,\ (a+b)^2=0$

따라서 $a+b=0$

21. 직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y=x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=5$

해설

$x+2y-3=0 \Rightarrow x-2y-3=0$($x$ 축 대칭이동)

$\Rightarrow \quad y-2x-3=0$ ($y=x$ 대칭이동)

원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.

따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.

$\therefore \ a-2-3=0 \quad \therefore \ a=5$

22. 다음은 $\frac{1}{x}+\frac{4}{y}=1$을 만족하는 두 양수 x, y에 대하여 $x+y$의 최솟값을 구하는 풀이이다. 적절하지 못한 부분은?

$$\frac{1}{x}+\frac{4}{y}\geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{4}{y}}\cdots ㉠$$
$$=\frac{4}{\sqrt{xy}}$$
$$\therefore\ \sqrt{xy}\geq 4\cdots ㉡$$
$$\therefore\ x+y\geq 2\sqrt{xy}\geq 2\cdot 4=8\cdots ㉢$$
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이다. ⋯⋯ ㉣

① ㉠
② ㉡
③ ㉢
④ ㉣
⑤ 틀린 곳이 없다.

해설

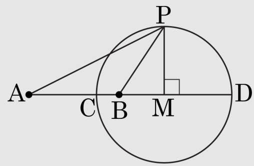
㉠에서 등호가 성립하는 경우는 $\frac{1}{x}=\frac{4}{y}$

즉 $y=4x$일 때이고,
㉢에서 등호가 성립하는 경우는
$x=y$일 때이므로 서로 일치하지 않는다.
따라서 $x+y$의 최솟값은 8이 될 수 없다.

23. 두 점 $A(1,1)$, $B(7,4)$ 에서 이르는 거리의 비가 $2:1$ 인 임의의 점 P 에 대하여 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대일 때, $\tan(\angle PAB)$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설



점 P 의 자취는 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점 C와 $2:1$ 로 외분하는 점 D 를
지름의 양 끝으로 하는 원이다.

점 C 의 좌표는

$\left(\frac{14+1}{2+1}, \frac{8+1}{2+1}\right)$, 즉 $C(5,3)$

점 D 의 좌표는

$\left(\frac{14-1}{2-1}, \frac{8-1}{2-1}\right)$ 즉, $D(13,7)$

따라서, CD 의 중점 M 의 좌표는

$\left(\frac{5+13}{2}, \frac{3+7}{2}\right)$

즉, $M(9,5)$ 이므로

$\overline{CM} = \sqrt{(9-5)^2+(5-3)^2} = 2\sqrt{5}$

따라서, 점 P 의 자취는 중심의 좌표가 $(9,5)$ 이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 원이므로 자취의 방정식은

$(x-9)^2+(y-5)^2 = 20$

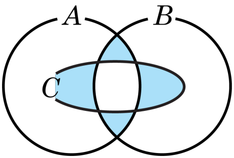
그런데 다음 그림에서 $\triangle ABP$ 의 넓이가 최대인 경우는 선분 AM 과 선분 PM 이 수직인 경우이다.

이 때, $\overline{AM} = \sqrt{(9-1)^2+(5-1)^2} = 4\sqrt{5}$,

$\overline{PM} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$$\tan(\angle PAB) = \tan(\angle PAM) = \frac{2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = \frac{1}{2}$$

24. 다음 그림에서 $n(A)=18, n(B)=12, n(C)=15, n(A\cup B)=25, n(B\cup C)=18, n(C\cup A)=23$ 일 때, 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 12 개

해설

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \to n(A\cap B)=5$,
$n(B\cup C)=18$ 이므로, $n(C-B)=n(B\cup C)-n(B)=18-12=6$
,
$n(C\cup A)=23$ 이므로, $n(C-A)=n(C\cup A)-n(A)=23-18=5$
,
$n(C)=15$ 이므로 $n(A\cap B\cap C)=n(C)-n(C-B)-n(C-A)=15-6-5=4$,
색칠한 부분은 $((A\cap B)-(A\cap B\cap C))\cup(C-A)\cup(C-B)$,
$n((A\cap B)-(A\cap B\cap C)\cup(C-A)\cup(C-B))=n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)+n(C-A)+n(C-B)=5-4+5+6=12$

25. a, b가 양의 상수이고, x, y가 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 만족하면서 변할 때, $x+y$의 최댓값은?

① a^2 ② b^2 ③ $\sqrt{a^2+b^2}$

④ a^2+b^2 ⑤ $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$

해설

코시-슈바르츠 부등식

$(a^2+b^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) \geq (x+y)^2$은 항상 성립하므로

$a^2+b^2 \geq (x+y)^2 \cdots\cdots$ ①

$\therefore x+y \leq \sqrt{a^2+b^2} \cdots\cdots$ ②

①의 등호가 성립할 조건은

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이고 $\frac{x}{a^2}=\frac{y}{b^2} \cdots\cdots$ ③

또, ③의 등호는 $x+y \geq 0$일 때, 성립하므로

③을 풀면

$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $y=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$이고,

$x+y$의 최댓값은 $\sqrt{a^2+b^2}$이다.