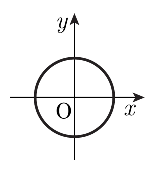
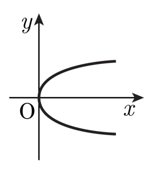
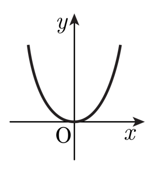
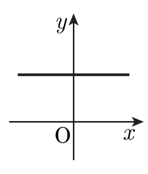
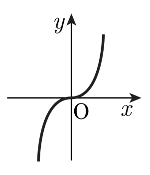
1. 다음 그래프 중 역함수가 존재하는 함수의 그래프가 될 수 있는 것은?

①


②


③


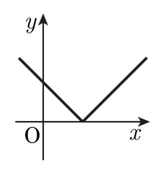
④


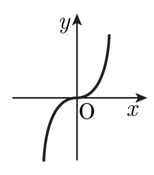
⑤


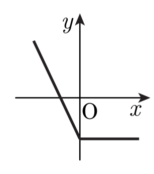
해설

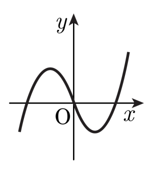
일대일 대응의 정의에 의해 ⑤번이다.

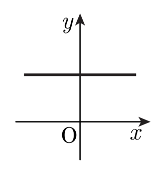
2. 다음 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 중 역함수가 존재하는 것은?

①


②


③


④


⑤


해설

①, ③, ④, ⑤ 는 일대일 대응이 아니므로 역함수가 존재하지 않는다.

3. 함수 $y = 2x - 2$ 의 역함수를 구하면?

① $y = \frac{1}{2}x - 1$　② $y = \frac{1}{2}x + 1$　③ $y = -\frac{1}{2}x + 1$
④ $y = -\frac{1}{2}x - 1$　⑤ $y = -\frac{1}{2}x + 2$

해설

$y = 2x - 2$, $x = \frac{1}{2}y + 1$ x, y 를 바꿔주면
$\Rightarrow$ $y = \frac{1}{2}x + 1$

4. 함수 $f(x) = 2ax - a + 2$에 대하여 $f^{-1}(-7) = 2$일 때, 상수 a의 값은 얼마인가?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$f^{-1}(-7) = 2$이므로
역함수의 정의에 의해서
$f(2) = -7,\ f(2) = 2a \times 2 - a + 2 = -7,\ 3a = -9$
$\therefore a = -3$

5. 함수 $f(x) = 2x - 3$ 에 대하여 $f^{-1}(2)$ 의 값은?

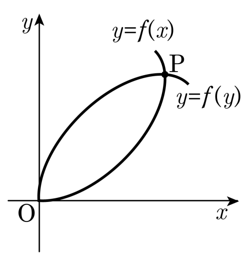
① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$f^{-1}(2) = a$ 라 하면, $f(a) = 2$ 이므로 $2a - 3 = 2$

$\therefore\ a = \frac{5}{2}$

6. 다음 그림과 같은 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $x=f(y)$ 의 교점 P 가 될 수 있는 점은 무엇인가?



① $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$　② $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$

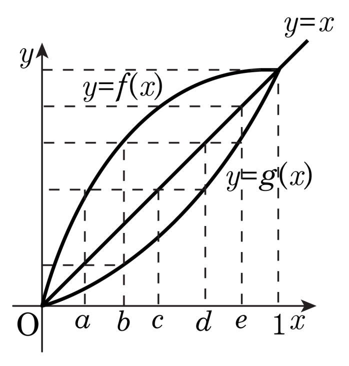
③ $(1,\ 2)$　④ $(2,\ 2)$

⑤ $(2,\ 3)$

해설

$y=f(x)$ 와 $x=f(y)$ 는
서로 역함수의 관계이므로 두 그래프의
교점 P 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와
직선 $y=x$ 의 교점과 같다.
따라서 점 P 는 직선 $x=y$ 위의 점이므로
$(2,\ 2)$ 이다.

7. 집합 $A = \{x | 0 \leq x \leq 1\}$에 대하여 A에서 A로의 함수 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, $(f \circ g \circ f^{-1})(d)$의 값은 얼마인가?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$y = x$를 이용하여 함숫값을 구한다.

$f^{-1}(d) = x$라 하면,

$f(x) = d \qquad \therefore x = b$

$\therefore (f \circ g \circ f^{-1})(d)$

$= (f \circ g)(f^{-1}(d))$

$= (f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a) = c$

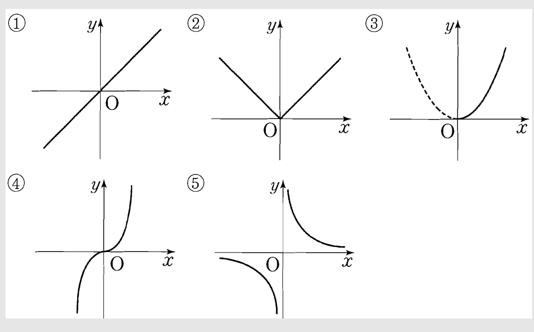
8. 다음 함수 중 역함수가 존재하지 않는 것은 무엇인가?

① $y = x$ ② $y = |x|$ ③ $y = x^2\ (x \geq 0)$

④ $y = x^3$ ⑤ $y = \frac{1}{x}\ (x \neq 0)$

해설

역함수가 존재할 필요충분조건은
함수가 일대일대응인 것이다.
따라서, 일대일대응이 아닌 함수의 그래프는
②이다.



9. 함수 $f(x) = ax + b(a > 0)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 이 함수 $f(x)$와 같을 때, 상수 a, b의 값을 구하면?

① $a = 1,\ b = 0$ ② $a = 1,\ b = 1$ ③ $a = 2,\ b = 0$
④ $a = 2,\ b = 1$ ⑤ $a = 3,\ b = 0$

해설

$f^{-1}(x) = f(x)$에서 $f(f(x)) = x$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= af(x) + b \\ &= a(ax + b) + b \\ &= a^2x + ab + b \end{aligned}$$

$a^2x + ab + b = x$

$\therefore\ a^2 = 1,\ ab + b = 0$

$\therefore\ a = 1,\ b = 0$

10. 다음 보기의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면 무엇인가?

보기

㉠ 두 함수 f, g 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 이다.

㉡ 함수 f 가 일대일대응이면 역함수 f^{-1} 가 존재한다.

㉢ 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 f^{-1} 가 존재하면
$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$ 이다.
(단, $X \neq Y$)

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉡,㉢ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

㉠. $f \circ g \neq g \circ f$
㉢. $f : X \to Y, f^{-1} : Y \to X$ 이므로,
$f \circ f^{-1} : Y \to Y, f^{-1} \circ f : X \to X$
그런데, 조건에서 $X \neq Y$ 이다.
$\therefore f \circ f^{-1} \neq f^{-1} \circ f$
따라서, 옳은 것은 ㉡뿐이다.

11. 두 집합 $X = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$를 $f(x) = 2x + 5$로 정의 할 때, $f^{-1}(1) + f^{-1}(5)$의 값은 얼마인가?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$f^{-1}(1) = a,\ f^{-1}(5) = b$로 놓으면
$f(a) = 1,\ f(b) = 5$
$f(x) = 2x + 5$ 이므로
$f(a) = 1$ 에서 $2a + 5 = 1 \quad \therefore a = -2$
$f(b) = 5$ 에서 $2b + 5 = 5 \quad \therefore b = 0$
$\therefore a + b = -2$

12. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수

$f(x)=\begin{cases} x+k & (x \geq 0) \\ -x+k & (x<0) \end{cases}$ 가 $f^{-1}(2)=-3$ 을 만족시킬 때, $f(5)$ 의 값은 얼마인가?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

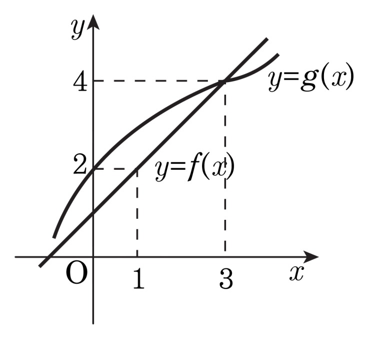
$f^{-1}(2)=-3$ 에서 $f(-3)=2$ 이므로

$f(-3)=3+k=2$

$\therefore\ k=-1$ 이므로 $f(x)=\begin{cases} x-1 & (x \geq 0) \\ -x-1 & (x<0) \end{cases}$

$\therefore\ f(5)=5-1=4$

13. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1}\circ f)(1)+g(3)$의 값은 얼마인가?



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면
$(g^{-1}\circ f)(1)+g(3)=g^{-1}(f(1))+4$
$=g^{-1}(2)+4$
$g^{-1}(2)=k$로 놓으면 $g(k)=2$
문제의 그림에서 $y=g(x)$의 그래프가
$(0,2)$를 지나므로 $g(0)=2$
이 때, $y=g(x)$는 일대일대응이므로 $k=0$
$\therefore g^{-1}(2)+4=0+4=4$

14. 함수 $f(x)=kx+1$ 에 대하여 $f^{-1}=f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은? (단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4 ② 3 ③ 2 ④ −1 ⑤ −2

해설

f^{-1} 이므로 $f \circ f = \mathrm{I}$

$(f \circ f)(x) = x$에서

$f(f(x)) = f(kx+1) = k(kx+1)+1 = k^2x+k+1 = x$

$\therefore\ k^2 = 1,\ k+1 = 0$ 따라서 $k = -1$

15. 두 함수 $f(x)=2x+5$, $g(x)=-3x+2$ 에 대하여 $(g^{-1}\circ f)(a)=2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $a=-\frac{3}{2}$ ② $a=-\frac{5}{2}$ ③ $a=-\frac{7}{2}$
④ $a=-\frac{9}{2}$ ⑤ $a=-\frac{11}{2}$

해설

$(g^{-1}\circ f)(a)=g^{-1}(f(a))=2$ 에서
$f(a)=g(2)$ 이다.
주어진 함수식에 의하여
$\therefore\ 2a+5=-3\cdot 2+2$
$\therefore\ a=-\frac{9}{2}$

16. $f(x) = 3x - 2,\ g(x) = 3x + 4$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(3) \\ &= (I \circ g^{-1} \circ f)(3) \\ &= (g^{-1} \circ f)(3) \\ &= g^{-1}(f(3)) \\ &= g^{-1}(7)\end{aligned}$$

$g^{-1}(7) = a$ 라 하면 $g(a) = 7,\ 3a + 4 = 7$

$\therefore\ a = 1$

17. 실수 전체집합에서 정의된 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 2x - 1$, $(h \circ (g \circ f))(x) = -2x + b$ 가 성립하고, $f(x) = ax + 1$ 일 때, 두 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$ 이므로

$(h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(ax + 1) = 2(ax + 1) - 1 = 2ax + 1$

$2ax + 1 = -2x + b$ 에서 $a = -1, b = 1$

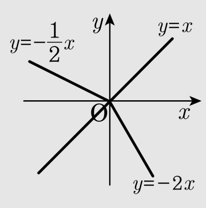
$\therefore a + b = 0$

18. 함수 $f(x)=\begin{cases}-2x & (x\geq 0)\\ ax & (x<0)\end{cases}$ 가 모든 실수 x에 대하여 $f^{-1}(x)=f(x)$를 만족할 때, 상수 a의 값은? (단, $f^{-1}(x)$는 $f(x)$의 역함수이다.)

① 2　② $\frac{1}{2}$　③ $-\frac{1}{2}$　④ -1　⑤ -2

해설

$f^{-1}(x)=f(x)$이려면 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이어야 한다.
직선 $y=x$에 대하여 직선 $y=-2x$와 대칭인 직선의 방정식은 $x=-2y$
즉, $y=-\frac{1}{2}x$이므로 $a=-\frac{1}{2}$이다.



19. 점 $(-1,\ -2)$를 지나는 일차함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-3)$의 값은?

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

해설

$f = f^{-1}$이므로 $(f \circ f)(x) = x$
$f(x) = a(x+1) - 2 = ax + a - 2\ (a \neq 0)$로 놓으면
$f(f(x)) = a(ax + a - 2) + a - 2 = x$
$\therefore a^2x + a^2 - a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1$, $a^2 - a - 2 = 0$이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x - 3$이고
$f(-3) = -(-3) - 3 = 0$이다.

20. 함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에 대하여 $f(x)$ 의 역함수가 존재할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = 1$ 일 때, x 의 값을 구하면? (단, $f^{-1}(x)$ 은 $f(x)$ 의 역함수)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & (x \geq 1) \\ -\sqrt{1-x} & (x < 1) \end{cases}$ 에서

$(f^{-1} \circ f^{-1})(x) = (f \circ f)^{-1}(x) = 1$

$(f \circ f)(1) = (f(f(1)) = f(0) = -1$

$\therefore\ x = -1$