1. $\dfrac{{}_nP_3}{{}_{n+2}P_3} = \dfrac{5}{12}$ 일 때 n 값을 구하면?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$$\frac{{}_nP_3}{{}_{n+2}P_3} = \frac{\dfrac{n!}{(n-3)!}}{\dfrac{(n+2)!}{(n+2-3)!}}$$

$$= \frac{(n-2)(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{5}{12}$$

$\dfrac{(n-2)(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{5}{12}$ 을 풀면

$7n^2 - 51n + 14 = 0$

$(7n-2)(n-7) = 0$

$\therefore n = \dfrac{2}{7}$ 또는 $n = 7$

${}_nP_3$ 에서 n은 3 이상의 자연수이므로

$\therefore n = 7$

2. 빨강, 주황, 노랑, 초록, 파랑, 남색, 보라의 7가지 색 중에서 4가지를 뽑아 그림을 색칠하려고 한다. 빨강을 포함하여 뽑는 경우의 수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 가지

▷ 정답 : 20 가지

해설

$_6C_3 = 20$

3. 5명의 가족 중에서 아빠, 엄마를 포함하여 4명을 뽑아 일렬로 세우는 방법의 수는?

① 35　② 72　③ 108　④ 144　⑤ 180

해설

3명 중 2명을 뽑은 후, 4명을 일렬로 세우는 방법을 구한다.

$\therefore\ {}_3C_2 \times 4! = 72$

4. 5 명의 학생을 2 명과 3 명의 두 그룹으로 나누는 방법의 수는?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$_5C_2 \times _3C_3 = 10$

5. 1부터 72까지의 자연수 중에서 72와 서로소인 수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 24 개

해설

$72 = 2^3 \times 3^2$

72와 서로소는 2의 배수도 아니고, 3의 배수도 아닌 것

$\therefore\ 72 - (36 + 24 - 12) = 24$

$\therefore$ 24 개

6. 10명의 학생이 O, X 문제에 임의로 답하는 경우의 수는?

① 128 ② 256 ③ 512 ④ 1024 ⑤ 2048

해설

각 학생이 대답할 수 있는 가지 수가
2가지씩이므로 $\Rightarrow 2^{10} = 1024$

7. 180 과 600 의 공약수의 개수는 모두 몇 개인가?

① 8개 ② 9개 ③ 10개 ④ 11개 ⑤ 12개

해설

두 수의 공약수는 두 수의 최대공약수의 약수이므로

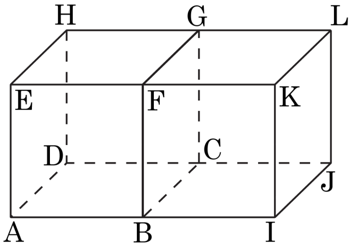
$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 이고,

$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$ 에서

최대공약수 $G.C.D. = 2^2 \times 3 \times 5$ 이고

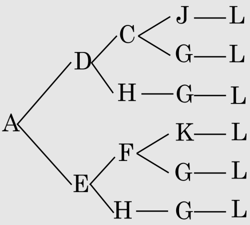
따라서 공약수의 개수는 12

8. 두 개의 정육면체가 서로 붙어 있는 아래 그림에서 A 에서부터 L 까지 모서리를 따라 최단 거리로 가는 방법 중 B 를 통과하지 않는 방법의 수를 구하면?



① 4　② 6　③ 8　④ 12　⑤ 16

해설



위의 수형도에서 구하는 방법의 수는 6 가지이다.

9. 1, 2, 3, 4, 5 의 번호가 각각 적힌 5 개의 농구공을 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 라고 쓰여진 가방에 각각 1 개씩 넣을 때, 2 번 공은 A_1 에 넣고, k 번 공은 A_k 에 넣지 않는 경우의 수는? (단, $k = 1, 3, 4, 5$)

① 11 가지 ② 13 가지 ③ 17 가지

④ 21 가지 ⑤ 35 가지

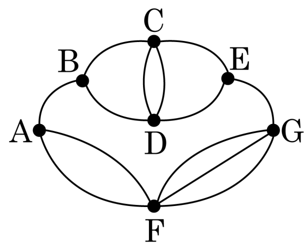
해설

2 번 공을 제외한 나머지를 표를 그려 직접 구한다.

A_2	A_3	A_4	A_5
3	1	5	4
3	4	5	1
3	5	1	4
1	4	5	3
1	5	3	4
4	1	5	3
4	5	3	1
4	5	1	3
5	4	1	3
5	4	3	1
5	1	3	4

$\therefore$ 총 11 가지

10. A, B, C, D, E, F, G 의 일곱 도시 사이에 다음 그림과 같은 도로망이 있다. 같은 지점은 많아야 한 번 밖에 지날 수 없고 지나지 않는 도시가 있어도 될 때, A 에서 G 로 가는 경우의 수는?



① 6　　② 8　　③ 9　　④ 12　　⑤ 14

해설

(i) A 에서 B, E 를 경유해서 G 로 가는 방법은

$A \to B \to C \to E \to G$ 의 1 가지

$A \to B \to D \to E \to G$ 의 1 가지

$A \to B \to C \to D \to E \to G$ 의 2 가지

$A \to B \to D \to C \to E \to G$ 의 2 가지

$\therefore$ 6 (가지)

(ii) A 에서 F 를 경유해서 G 로 가는 방법

$2 \times 3 = 6$ (가지)

(i), (ii)가 동시에 발생할 수 없으므로

$6 + 6 = 12$ (가지)

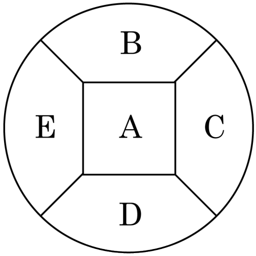
11. 500 원 짜리 동전 2 개, 100 원 짜리 동전 6 개, 10 원 짜리 동전 3 개가 있을 때, 이 동전의 일부 또는 전부를 써서 지불할 수 있는 방법의 수를 a, 지불할 수 있는 금액의 수를 b 라 할 때, $a-b$ 의 값은?

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

해설

500 원 짜리 동전 2 개로 $0, 1, 2$ 개의 3 가지로 지불할 수 있으므로 500 원 짜리 동전의 지불방법의 수는 3 가지이다.
마찬가지로 생각하면 100 원 짜리는 7 가지, 10 원 짜리는 4 가지씩의 지불방법이 있다.
그런데 모두 하나도 지불하지 않는 경우는 제외해야 하므로
$a = 3 \times 7 \times 4 - 1 = 83$ (가지)
또, 500 원 짜리 동전을 모두 100 원 짜리 동전 5 개로 생각하면, 100 원 짜리 동전 16 개, 10 원 짜리 동전 3 개를 써서 지불할 수 있는 금액의 수는
$b = 17 \times 4 - 1 = 67$ (가지)
$\therefore a - b = 16$

12. 그림의 A, B, C, D, E 5 개의 영역을 5 가지 색으로 칠하려고 한다. 같은 색을 중복하여 사용해도 좋으나 인접한 부분은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 경우의 수는?



① 160 ② 270 ③ 360 ④ 420 ⑤ 540

해설

A 를 먼저 칠할 때 선택할 수 있는 방법은 5 가지이다. 그 다음 B 를 칠할 때 선택할 수 있는 방법은 4 가지, C 를 칠할 수 있는 방법은 3 가지이다.

(i) B 와 D 가 다른 색인 경우

D 에 칠할 수 있는 색은 A, B, C 에 칠한 색을 제외한 2 가지이고 E 에 칠할 수 있는 색은 A, B, D 에 칠한 색을 제외한 2 가지이므로

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 2 = 240$ (가지)

(ii) B 와 D 가 같은 색인 경우

D 에 칠할 수 있는 색은 B 와 동일하므로 1 가지이고 E 에 칠할 수 있는 색은 $A, B(= D)$ 에 칠한 색을 제외한 3 가지이므로

$5 \times 4 \times 3 \times 1 \times 3 = 180$ (가지)

따라서 (i) (ii) 에서 $240 + 180 = 420$ (가지)

13. 다음은 ${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{\text{(나}})$ 임을 보인 것이다.

> 10개의 숫자 1, 2, 3, $\cdots$, 9,10중에서 서로 다른 5개의 숫자를 뽑아서 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는 ${}_{10}P_5$ 이다.
> 이 때, 다섯 자리의 자연수 중에서 숫자 2가 들어있는 것의 개수는 $(\boxed{\text{가}})$, 숫자 2가 들어 있지 않은 것의 개수는 $(\boxed{\text{나}})$ 이다.
> 따라서 다음 등식이 성립한다.
> ${}_{10}P_5 = (\boxed{\text{가}}) + (\boxed{\text{나}})$

위의 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① ${}_9P_4, 5{}_9P_5$ ② $5{}_9P_4,\ {}_9P_5$ ③ ${}_9P_4,\ {}_8P_5$

④ ${}_8P_4,\ 4{}_9P_5$ ⑤ $4{}_9P_4,\ {}_9P_5$

해설

다섯 자리의 자연수 중 2가 들어 있는 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자중에서
4개를 택하여 나열한 후 2를 추가하면 되므로 ${}_9P_4 \times 5 = 5{}_9P_4$
2가 들어 있지 않은 것의 개수는 2를 제외한 9개의 숫자에서 5개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_9P_5$ 이다.
따라서 ${}_{10}P_5 = 5{}_9P_4 + {}_9P_5$

14. 남자 4 명, 여자 3 명을 일렬로 세울 때, 여자 3 명이 이웃하여 서는 경우의 수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 720 가지

해설

여자 3 명을 한 묶음으로 본다.

$5! \times 3! = 720$

15. 남학생 4 명, 여학생 2 명이 한 줄로 설 때, 특정한 3 명이 이웃하여 서는 방법의 수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 가지

▷ **정답 :** 144 가지

해설

묶음 안에서 특정한 3 명이 자리를 바꾸는 방법은 $3! = 6$(가지)
3 명을 한 묶음으로 생각하여 4 명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$ (가지) 이다.
$\therefore$ 구하는 경우의 수는 $24 \times 6 = 144$ (가지)

16. 6 개의 문자 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$를 일렬로 배열할 때, 모음 $a,\ e$가 이웃하지 않는 경우는 몇 가지가 되는지 구하여라.

▶ 답 : ____________ 가지

▷ 정답 : 480 가지

해설

$a,\ e$ 를 제외한 나머지 $b,\ c,\ d,\ f$ 네 문자를 일렬로 먼저 배열하는 방법의 수는 $4!$ 가지가 있다.
이 때, 그 네 문자 사이의 양 끝의 5 개의 자리에 $a,\ e$를 늘어 놓으면, $a,\ e$는 이웃할 수 없다.
즉, $\square\ b\ \square\ c\ \square\ d\ \square\ f\ \square$의 다섯 개의 $\square$중에 두 개를 골라 $a,\ e$ 를 배열한다.
따라서, 구하는 가짓수는 $4! \times {}_5P_2 = 24 \times 20 = 480$ (가지)

17. *various* 의 7 개의 문자를 일렬로 나열할 때, 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는?

① 120 ② 360 ③ 600 ④ 720 ⑤ 1080

해설

자음 3 개중 2 개를 뽑아 일렬로 나열하는 수 : ${}_3P_2$

나머지 5 개 문자를 배열하는 수 : 5!

${}_3P_2 \times 5! = 720$

18. $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 을 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수 중에서 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3 의 배수인 자연수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ____ 개

▷ 정답 : 48 개

해설

일의 자리의 수 a 와 백의 자리의 수 b 는 3 또는 6 이 되어야 하므로
a, b 를 정하는 방법의 수는 $2! = 2$ (가지)
이 때, 나머지 자리의 수는 $1, 2, 4, 5$ 중 어느 하나가 정해지면 되므로
나머지 네 자리의 수를 정하는 방법의 수는 $4! = 24$ (가지)
따라서, 구하는 자연수의 개수는
$2 \times 24 = 48$ (개)

19. 다음 표는 세계 각 국에서 사용하는 긴급구조대의 전화번호이다.

국가	한국	미국	호주	독일
전화번호	119	911	001	110

이들은 모두 0 부터 9 까지의 숫자로 이루어진 세 자리의 숫자이고, 이웃하는 어느 두 자리는 같은 숫자가 중복되어 있다. 이와 같이 세 자리의 숫자 중에서 이웃한 두 자리는 같은 숫자가 되는 전화번호의 종류는 모두 몇 가지인가?

① 160 ② 180 ③ 200 ④ 220 ⑤ 240

해설

이웃하는 방법에 따라 △△□, △□□의 두 가지 경우가 있고, △에 10가지 □가 9 가지이므로, 구하는 경우의 수는

$(10 \times 9) \times 2 = 180$

20. 0, 1, 2, 3, 4, 5 의 6 개의 숫자를 한번씩 사용하여 네 자리의 정수를 만들 때, 양 끝이 홀수인 자연수의 개수를 구하면?

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 72 개

해설

양 끝이 홀수이므로 1, 3, 5 중 2 개를 배열하는 경우의 수는

$_3P_2 = 6$

두 홀수를 제외한 나머지 4 개의 숫자를 배열하는 경우의 수는

$_4P_2 = 12$

따라서 $6 \times 12 = 72$

21. 서울의 어떤 지역에서는 국번 4자리를 포함하여 8자리의 전화 번호를 사용하고 있다. 국번에 사용할 수 있는 숫자가 2, 4, 6, 8, 0일 때, 이 지역에서 사용할 수 있는 전화 번호는 몇 개인가? 단, 국번의 첫 번째 자리의 숫자는 0이 아니고, 숫자는 중복하여 사용한다.

① 4500000 ② 4999999 ③ 5000000

④ 6250000 ⑤ 7000000

해설

국번을 먼저 생각하면 첫 번째 자리에 올수 있는 가지수는 4 가지이고

나머진 모두 5 가지 이다.

$\therefore\ 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$

뒤의 4 자리는 각각 10 가지씩 가능하다.

$\therefore\ 500 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 5000000$

22. 남학생 4명, 여학생 6명 중에서 반장 1명, 부반장 1명을 뽑을 때, 반장, 부반장 중에서 적어도 한 명은 여자인 경우의 수를 구하여라.

▶ **답 :** ________ 가지

▷ **정답 :** 78 가지

해설

전체의 경우에서 모두 남자인 경우의 수를 빼준다.

${}_{10}P_2 - {}_4P_2 = 90 - 12 = 78$

23. 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5를 중복하여 만든 자연수를 크기가 작은 순서로 배열할 때, 1000은 몇 번째 수인가?

① 181 ② 215 ③ 216 ④ 256 ⑤ 257

해설

처음 일의 자리일 때는 5가지가 가능하고 그 다음부터는 6번마다 자리 수가 변경 된다.

100이 되기 전까지 개수 : $(6 \times 6) - 1 = 35$

$100 \sim 999$: $(6 \times 6) \times 5 = 180$

따라서 1000은 $180 + 35 + 1 = 216$번째 수이다.

24. 남자 6 명, 여자 6 명의 모임에서 4 명의 대표를 뽑을 때, 남자와 여자를 적어도 1 명씩 뽑는 방법의 수는?

① 455 ② 465 ③ 475 ④ 485 ⑤ 495

해설

전체의 경우의 수에서 남자만 뽑거나, 여자만 뽑는 경우를 빼준다. ${}_{12}C_4 - ({}_6C_4 + {}_6C_4) = 465$

25. 집합 $X = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ 에 대하여 X에서 X로의 일대일 대응의 개수는?

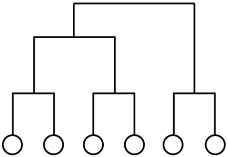
① 16 개 ② 24 개 ③ 30 개 ④ 42 개 ⑤ 54 개

해설

집합 X의 원소를 나열하는 방법의 수와 같다.

${}_4P_4 = 24$(개)

26. 갑, 을, 병, 정, 무, 기의 여섯 팀이 다음 그림과 같은 대진표에 의해 축구경기를 하려고 할 때, 대진표를 작성하는 경우의 수는?



① 30 ② 32 ③ 35 ④ 38 ⑤ 45

해설

6 팀 중에 먼저 2 팀을 골라 $(4, 2)$ 팀으로 나눈다.
그 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$ (가지)
나머지 4 팀이 한 쪽에서 시합을 하는 경우는
3가지이므로 구하는 경우의 수는
$15 \times 3 = 45$ (가지)

27. 키가 모두 다른 남학생 세 명과 여학생 세 명이 일렬로 놓인 의자에 앉으려고 한다. 남학생끼리는 키가 작은 학생이 큰 학생보다 왼쪽에 앉아야 할 때, 방법의 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 120

해설

남학생 세 명이 앉는 순서는 정해져 있다.
6 명이 앉는 방법의 수를 남학생 3 명이 자리를 바꿔 앉는 방법의 수로 나누면

$$\frac{6!}{3!} = 120$$

28. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. ${}_{3n}C_{n-1} = {}_{3n}C_{2n+1}$

ㄴ. ${}_{4n}P_{3}n = (3n)! \times {}_{4n}C_{n}$

ㄷ. ${}_{2n+1}C_{n+2} = {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2}$ (단, $n \geq 2$)

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ , ㄷ

해설

㉠ ${}_{n}C_{r} = {}_{n}C_{n-r}$ 이므로

$${}_{3n}C_{n-1} = {}_{3n}C_{3n-(n-1)} = {}_{3n}C_{2n+1} \text{ (참)}$$

㉡ ${}_{n}C_{r} = \dfrac{{}_{n}P_{r}}{r!}$ 에서

$${}_{n}P_{r} = r! \times {}_{n}C_{r}$$

$$\begin{aligned} {}_{4n}P_{3n} &= (3n)! \times {}_{4n}C_{3n} \\ &= (3n)! \times {}_{4n}C_{4n-3n} \\ &= (3n)! \times {}_{4n}C_{n} \text{(참)} \end{aligned}$$

㉢ ${}_{n}C_{r} = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_{r}$ 이므로

$$\begin{aligned} {}_{2n+1}C_{n+2} &= {}_{2n}C_{n+1} + {}_{2n}C_{n+2} \\ &= {}_{2n}C_{2n-(n+1)} + {}_{2n}C_{2n-(n+2)} \\ &= {}_{2n}C_{n-1} + {}_{2n}C_{n-2} \text{(참)} \end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢ 이다.

29. 대학수학능력시험에서 과학탐구 영역을 선택하는 학생은 물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생물Ⅰ, 지구과학Ⅰ, 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ 이 8개 과목 중에서 최대 4과목까지 응시할 수 있다. 단, 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ의 4개 과목에서는 2과목까지만 선택할 수 있다. 어떤 학생이 과학탐구 영역에서 3개 과목을 선택하려고 할 때, 모든 경우의 수는?

① 48　② 52　③ 56　④ 62　⑤ 74

해설

(Ⅰ, Ⅱ) $= (3,0),\ (2,1),\ (1,2)$가 가능하고
각각의 경우를 구해 더한다.

$\therefore\ {}_4C_3 + {}_4C_2 \times {}_4C_1 + {}_4C_1 \times {}_4C_2 = 52$

30. 십이각형의 서로 다른 대각선의 교점 중 세 선분이 교차하는 점이 없다고 할 때 대각선의 교점은 몇 개인지 구하여라. (단 꼭짓점은 제외한다.)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 495 개

해설

대각선의 교점은 두 대각선에 의해 결정되고 두 대각선은 4개의 점에 의해 결정되므로 십이각형의 대각선의 교점의 최대 개수는 ${}_{12}C_4 = 495$

31. 6 명이 타고 있는 승강기가 1 층부터 4 층까지의 4 개 층에서 선다. 각각 2 명씩 3 개 층에서 모두 내리게 되는 경우의 수는?

① 60　② 120　③ 180　④ 240　⑤ 360

해설

6 명을 2 명씩 3 조로 나누는 방법은

$${}_6C_2 \times {}_4C_2 \times \frac{1}{3!} = 15,$$

4 개 층 중 3 개 층에 내리므로, $15 \times {}_4P_3 = 360$ (가지)

32. 어떤 원자의 전자들은 에너지의 증감에 따라 세 가지 상태 a, b, c로 바뀐다. 이 때, 다음 규칙이 적용된다고 하자.

규칙1: 에너지가 증가하면 b상태의 전자는 c상태로 올라가고, a상태의 전자 중 일부는 b상태로, 나머지는 c상태로 올라간다. 규칙2: 에너지가 감소하면 b상태의 전자는 a상태로 내려가고, c상태의 전자 중 일부는 b상태로, 나머지는 a상태로내려간다.

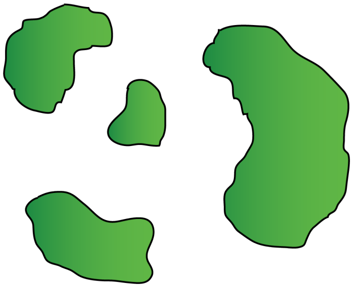
<단계1>에서 전자는 a상태에 있다. 에너지가 증가하여 <단계2>가 되면 이 전자는 b상태 또는 c상태가 된다. 이때, 이 전자가 취할 수 있는 변화의 경로는 $a \to b$와 $a \to c$의 2가지이다. 다시 에너지가 감소하여 <단계3>이 되면, 이 때까지의 가능한 변화 경로는 $a \to b \to a$, $a \to c \to b$, $a \to c \to a$의 3가지이다. 이와 같이 순서대로 에너지가 증감을 반복할 때, <단계1>부터 <단계7>까지 이 전자의 가능한 변화 경로의 수는?

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

해설

단계 1 : 1가지,
단계 2 : 2가지,
단계 3 : 3가지,
단계 4 : 5가지 $\cdots$
즉, 피보나치 수열을 이룬다.
따라서 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, $\cdots\cdots$
$\therefore$ 단계 7 : 21

33. 다음 그림과 같이 4 개의 섬이 있다. 3 개의 다리를 건설하여 4 개의 섬 모두를 연결하는 방법의 수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 16 개

해설

4개의 섬을 A, B, C, D라 하자.

(i) 한 섬에 다리를 1개 또는 2개를 건설하는 경우는

A → B → C → D

A → C → D → B

⋮

D → C → B → A

B → D → C → A

⋮

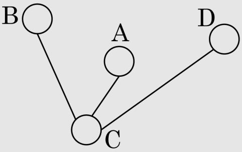
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$(가지)

A → B → C → D와 D → C → B → A,

A → C → D → B와 B → D → C → A는 같은 방법이므로

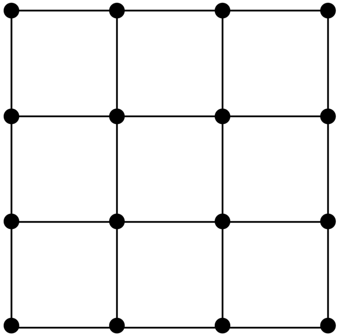
$\frac{24}{2} = 12$ (가지)

(ii) 아래의 그림과 같이 한 섬에 세 개의 다리를 건설하는 경우는 4 가지이다.



$\therefore 12 + 4 = 16$ (가지)

34. 아래 그림과 같이 정사각형 모양으로 16 개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형은 몇 개인가?

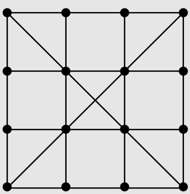


① 342 ② 428 ③ 489 ④ 516 ⑤ 642

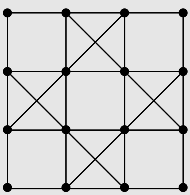
해설

전체 삼각형의 개수에서 일직선 위에 있는 점들 중 3개를 고를 경우를 제한다.

1) 점 4 개가 한 직선 위에 있는 경우 : 10 가지



2) 점 3 개가 한 직선 위에 있는 경우 : 4 가지



$_{16}C_3 - ({}_4C_3 \times 10 + {}_3C_3 \times 4) = 516$