

1. 무리식 $\sqrt{2-x} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ 의 값이 실수가 되도록 x 의 범위를 정할 때, 정수 x 의 개수는?

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 5개

⑤ 6개

해설

$$2 - x \geq 0, x + 3 > 0$$

$\therefore -3 < x \leq 2$ 이므로 정수의 개수는 5개

2. 무리식 $\sqrt{2x+5} + \sqrt{15-3x}$ 가 실수값을 갖도록 하는 정수 x 의 개수는?

① 6개

② 7개

③ 8개

④ 9개

⑤ 10개

해설

$$2x + 5 \geq 0, 2x \geq -5 \quad \therefore x \geq -2.5$$

$$15 - 3x \geq 0, 15 \geq 3x \quad \therefore 5 \geq x$$

$$\therefore -2.5 \leq x \leq 5$$

-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 총 8개

3. 실수 a, b 가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt{(-b)^2} = -b$

② $(-\sqrt{-a})^2 = -a$

③ $\sqrt{ab^2} = -b\sqrt{a}$

④ $(\sqrt{a})^2 = -a$

⑤ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이면 $a < 0, b < 0$

④의 경우 $(\sqrt{a})^2 = |a| (i)^2 = -|a| = a$ 이므로 옳지 않다.

4. $x - y < 0$, $xy < 0$ 일 때, $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} + \sqrt{x^2} - |y|$ 를 간단히 하면?

① $2x$

② $2y$

③ $-2x$

④ $-2y$

⑤ $2x - 2y$

해설

$$x - y < 0, xy < 0 \Rightarrow x < 0, y > 0$$

$$\sqrt{x^2 - 2xy + y^2} + \sqrt{x^2} - |y|$$

$$= \sqrt{(x - y)^2} + |x| - |y|$$

$$= |x - y| + |x| - |y|$$

$$= -(x - y) - x - y = -2x$$

5. 0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 일 때, $\sqrt{(a^3 - b^3)^2} - \sqrt{b^6}$ 을 간단히 하면?

① a^3

② $-a^3$

③ b^3

④ $-b^3$

⑤ 0

해설

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}} \text{ 이려면}$$

$b > 0, a < 0$ 이어야 한다

$$\therefore a^3 - b^3 < 0, b^3 > 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt{(a^3 - b^3)^2} - \sqrt{b^6} &= |a^3 - b^3| - |b^3| \\ &= -a^3 + b^3 - b^3 \\ &= -a^3 \end{aligned}$$

6. 실수 a 에 대하여 $\frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} = -\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$ 일 때, $\sqrt{a^2+2a+1} + \sqrt{a^2-2a+1}$ 의 값은?

① -2

② $2a$

③ $2a-2$

④ $-2a$

⑤ 2

해설

$$\sqrt{\frac{B}{A}} = -\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \text{ 이려면 } B \geq 0, A < 0$$

$$\therefore \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} = -\sqrt{\frac{a-1}{a-1}} \Rightarrow a+1 \geq 0 \quad a-1 < 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq a < 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2+2a+1} + \sqrt{a^2-2a+1}$$

$$= |a+1| + |a-1|$$

$$= a+1 - (a-1) = 2$$

7. $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ 일 때, 방정식 $|x-3| - |x+2| = -1$ 의 해를 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ 5

⑤ 6

해설

$$x+3 \geq 0, x-2 < 0 \rightarrow -3 \leq x < 2$$

$$-(x-3) - (x+2) = -2x + 3 - 2 = -1$$

$$\therefore x = 1$$

8. $-1 < a < 3$ 일 때, $\sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ 를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-3)^2} \\ &= |a+1| + |a-3| = (a+1) - (a-3) = 4\end{aligned}$$

9. $1 < x < 5$ 일 때, $\sqrt{(x^2 - 25)^2} + \sqrt{(x^2 - 1)^2}$ 을 간단히 하면?

① 24

② 26

③ $2x^2$

④ -24

⑤ $2x^2 - 26$

해설

$$1 < x < 5 \text{ 이므로 } x^2 - 25 < 0, x^2 - 1 > 0$$

$$\therefore (\text{준식}) = -(x^2 - 25) + (x^2 - 1) = 24$$

10. $x + \sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$ 이 유리수가 되는 실수 x 의 집합은?

① 정수 전체의 집합

② 유리수 전체의 집합

③ 실수 전체의 집합

④ $\sqrt{x^2 + 1}$ 이 유리수인 실수 x 의 집합

⑤ $x + \sqrt{x^2 + 1}$ 이 유리수인 실수 x 의 집합

해설

$$(\text{주어진 식}) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$- \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{(x + \sqrt{x^2 + 1})(x - \sqrt{x^2 + 1})}$$

$$= x + \sqrt{x^2 + 1} - \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{-1}$$

$$= x + \sqrt{x^2 + 1} + x - \sqrt{x^2 + 1} = 2x$$

$\therefore 2x$ 가 유리수이려면 x 는 유리수이어야 한다.

11. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9\end{aligned}$$

12. $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$ 을 계산하면?

① $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$

② $4 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$

③ $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} - 5$

④ $\frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{5} - \sqrt{3})$

⑤ $\frac{1}{3}(\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{2})$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})} \\ &= \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5} \\ &= \frac{2\sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})}{2\sqrt{6}} \\ &= \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5} \end{aligned}$$

13. $0 \leq a < 2$ 이고 $x = \frac{4a}{a^2 + 4}$ 일 때

$\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$1+x = 1 + \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2+4a+4}{a^2+4} = \frac{(a+2)^2}{a^2+4}$$

$$1-x = 1 - \frac{4a}{a^2+4} = \frac{a^2-4a+4}{a^2+4} = \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$$

$a^2+4 > 0$ 이고 $0 < a < 2$ 이므로

$$a+2 > 0, a-2 < 0$$

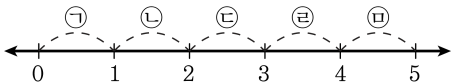
$$\therefore \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{(a+2)^2}{a^2+4}} = \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\sqrt{1-x} = \sqrt{\frac{(a-2)^2}{a^2+4}} = \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} &= \frac{a+2}{\sqrt{a^2+4}} + \frac{-a+2}{\sqrt{a^2+4}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{a^2+4}}\end{aligned}$$

$\therefore a = 0$ 일 때 최댓값 2

14. $f(a, b) = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}$ 로 정의할 때 $f(2, 1) + f(3, 2) + f(4, 3) + f(5, 4) + \cdots + f(10, 9)$ 의 값이 k 라 하면, 다음 중 실수 k 에 대응하는 수는 직선 위에서 어느 위치에 있는가? (단, $a > b > 0$)



▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$$a > b \text{ 일 때, } f(a, b) = \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\therefore f(2, 1) + f(3, 2) + f(4, 3) + \cdots + f(10, 9)$$

$$= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots$$

$$+ (\sqrt{10} - \sqrt{9})$$

$$= -1 + \sqrt{10} = k$$

그런데 $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$ 에서

$2 < -1 + \sqrt{10} < 3$ 이므로

k 는 ㉢안에 있다.

15. $x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $y = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ 일 때, $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

해설

$$x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\therefore x+y = \sqrt{5}, \quad x-y = 1$$

$$\therefore \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

16. $x = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $y = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ 일 때, $(\sqrt{x} - \sqrt{y}) \div (\sqrt{x} + \sqrt{y})$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$x = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{x} = \sqrt{2} + 1$$

$$y = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \sqrt{y} = \sqrt{2} - 1$$

$$\therefore (\text{준식}) = 2 \div 2\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

17. $x = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$, $y = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ 일 때, 식 $\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}$ 의 값은?

① $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

② $-\frac{2}{5}\sqrt{5}$

③ $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

④ $-\frac{4}{5}\sqrt{5}$

⑤ $\sqrt{5}$

해설

$x = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$, $y = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ 에서

$$\begin{cases} xy = \sqrt{9 - 5} = 2 \\ x^2 + y^2 = 6 \\ x^2 - y^2 = 2\sqrt{5} \end{cases} \quad \text{를 준식에 대입}$$

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} \\ &= \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{4xy}{x^2 - y^2} = \frac{4 \times 2}{2\sqrt{5}} \\ &= \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

18. $x = 2 + \sqrt{3}$, $y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때 $x\sqrt{y} + y\sqrt{x}$ 의 값은?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{3}$

③ $\sqrt{5}$

④ $\sqrt{6}$

⑤ $\sqrt{7}$

해설

$$\sqrt{x} = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{y} = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{6}, \quad \sqrt{xy} = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore x\sqrt{y} + y\sqrt{x} &= \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) \\ &= 1 \times \sqrt{6} = \sqrt{6}\end{aligned}$$

19. $x = \sqrt{10 + 8\sqrt{3 + \sqrt{8}}}$ 일 때 $x^2 - 8x$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -14

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{10 + 8\sqrt{3 + \sqrt{8}}} \\&= \sqrt{10 + 8\sqrt{(2+1) + 2\sqrt{2} \cdot 1}} \\&= \sqrt{10 + 8(\sqrt{2} + 1)} = \sqrt{18 + 8\sqrt{2}} \\&= \sqrt{18 + 2\sqrt{32}} = \sqrt{(16+2) + 2\sqrt{16 \cdot 2}} \\&= \sqrt{16} + \sqrt{2} = 4 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\therefore x - 4 = \sqrt{2}$$

양변을 제곱하면 $(x-4)^2 = (\sqrt{2})^2$

$$x^2 - 8x + 16 = 2$$

$$\therefore x^2 - 8x = -14$$

20. $0 < a < 1$ 이고 $x = a + \frac{1}{a}$ 일 때, $\sqrt{x^2 - 4} + x$ 를 a 로 나타내면?

- ① $2a$ ② $\frac{2}{a}$ ③ $-\frac{2}{a}$ ④ $-2a$ ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4} + x &= \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4} + a + \frac{1}{a} \\&= \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} + a + \frac{1}{a} \\&= -\left(a - \frac{1}{a}\right) + a + \frac{1}{a} = \frac{2}{a} \\&\left(\because 0 < a < 1 \text{ 일 때, } a < \frac{1}{a}\right)\end{aligned}$$

21. $0 < a < 1$ 이고, $x = \frac{1+a^2}{a}$ 일 때, $\frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}}$ 의 값을 구하면?

① a^2

② a

③ $\frac{1}{a}$

④ $a-1$

⑤ $a+1$

해설

$$x+2 = \frac{1+a^2}{a} + 2 = \frac{1}{a}(a+1)^2$$

$$\therefore \sqrt{x+2} = \frac{|a+1|}{\sqrt{a}} = \frac{a+1}{\sqrt{a}}$$

$$x-2 = \frac{1+a^2}{a} - 2 = \frac{(a-1)^2}{a}$$

$$\therefore \sqrt{x-2} = \frac{|a-1|}{\sqrt{a}} = \frac{1-a}{\sqrt{a}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x-2}} &= \frac{\frac{a+1}{\sqrt{a}} + \frac{1-a}{\sqrt{a}}}{\frac{a+1}{\sqrt{a}} - \frac{1-a}{\sqrt{a}}} \\ &= \frac{(a+1) + (1-a)}{(a+1) - (1-a)} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$