

1. 다음 중 치역이 실수 전체의 집합인 것은 무엇인가?

- ① $y = 2x$ ② $y = -x^2$ ③ $y = x^2 - 2$
④ $y = -x^2 + 2x$ ⑤ $y = 3$

해설

② $y \leq 0$ ③ $y \geq -2$ ④ $y \leq 1$ ⑤ $y = 3$

2. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 f 의 치역을 구하면?

① $\{-1, 1\}$

② $\{-1, 0, 1\}$

③ $\{0, 1, 2\}$

④ $\{-1, 0, 2\}$

⑤ $\{-1, 0, 1, 2\}$

해설

$$f(x) = 2x^2 - 3x \text{이므로}$$

$$f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 2$$

따라서 치역은 $\{-1, 0, 2\}$

3. 다음 중 항등함수를 찾으려면?

- ① $f(x) = x$ ② $f(x) = x + 1$ ③ $f(x) = x - 1$
④ $f(x) = x^2$ ⑤ $f(x) = x^2 + 1$

해설

항등함수는 $f(x) = x$ 또는 $y = x$ 이다.

4. 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$ 에 대하여 다음 중 X 에서 X 로의 항등함수를 모두 고른 것은 무엇인가?

$$\begin{aligned} f(x) &= x, & g(x) &= |x| \\ h(x) &= x^3, & k(x) &= \frac{|x+1| - |x-1|}{2} \end{aligned}$$

- ① f ② f, h ③ f, g, h
④ f, h, k ⑤ g, h, k

해설

$f: f(-1) = -1, f(0) = 0, f(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.
 $g: g(-1) = 1$ 이므로 항등함수가 아니다.
 $h: h(-1) = -1, h(0) = 0, h(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.
 $k: k(-1) = -1, k(0) = 0, k(1) = 1$ 이므로 항등함수이다.
따라서 항등함수인 것은 f, h, k 이다.

5. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

- ① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$
④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

6. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 에 대하여 $f(f(1)) + f(f(-2))$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$f(x) = (x-1)(x+2)$ 에서
 $f(1) = 0, f(-2) = 0, f(0) = -2$ 이고
 $f(f(1)) = f(f(-2)) = f(0)$ 이다.
 $\therefore f(f(1)) + f(f(-2)) = 2f(0) = -4$

7. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b) = f(a) + f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x) = |x|$

② $f(x) = -x^2$

③ $f(x) = 3x$

④ $f(x) = 2x + 3$

⑤ $f(x) = x^3 + 3x$

해설

① $f(a+b) = |a+b|$

$f(a) + f(b) = |a| + |b|$

이 때 $|a+b| \leq |a| + |b|$

② $f(a+b) = -(a+b)^2 = -a^2 - 2ab - b^2$

$f(a) + f(b) = -a^2 - b^2$

③ $f(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = f(a) + f(b)$

④ $f(a+b) = 2(a+b) + 3$

$f(a) + f(b) = 2a + 3 + 2b + 3 = 2(a+b) + 6$

⑤ $f(a+b) = (a+b)^3 + 3(a+b)$

$= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 + 3)$

$f(a) + f(b) = a^3 + 3a + b^3 + 3b$

$= a^3 + b^3 + 3(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2 + 3)$

8. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5, g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

- ① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

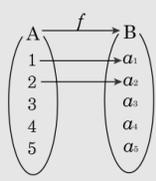
$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0, 3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

9. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

- ① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개
④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수
 $f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소
3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중
하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 =$
125 (개)



10. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

① $a = 1$ 또는 $b = c$

② $a = 1$

③ $b = c$

④ $a = 0$ 또는 $b = c$

⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

마찬가지로 $(g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$

$\therefore ac + b = ab + c$

즉, $(a - 1)(b - c) = 0$

$\therefore a = 1$ 또는 $b = c$

11. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로
 $x = 1$ 을 대입하면
 $f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$

12. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$

④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1, g(x) = 3x - 2 \text{ 일 때,} \\ (g \circ h)(x) &= f(x) \text{ 를 만족해야 하므로} \\ (g \circ h)(x) &= g(h(x)) = 3h(x) - 2 \\ 3h(x) - 2 &= x + 1, 3h(x) = x + 3 \\ \therefore h(x) &= \frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

13. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
 $\therefore -2(a-1) > 0$
 $\therefore a < 1$

14. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $(f \circ f \circ \dots \circ f)(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

① -10 ② -5 ③ 1 ④ 5 ⑤ 11

해설

$$f(x) = x - 1$$

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x - 1) = (x - 1) - 1 = x - 2$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x - 2) = (x - 2) - 1 = x - 3$$

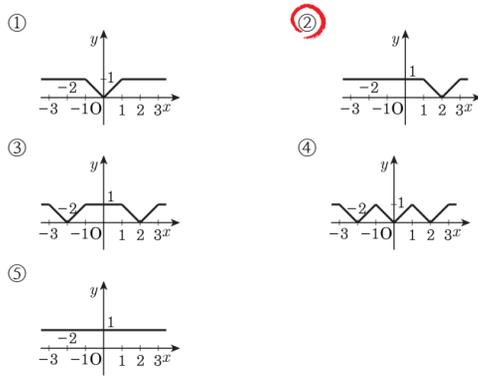
⋮

$$(f \circ f \circ \dots \circ f)(x) = x - 10$$

밑줄 그은 부분은 10개.

따라서, $a - 10 = 1$ 에서 $a = 11$

15. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$ 의 그래프는 ?



해설

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$$

$$g(x) = x - 2 \text{ 에서}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x - 2| \geq 1) \\ |x - 2| & (|x - 2| < 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x - 2| & (1 < x < 3) \end{cases}$$

