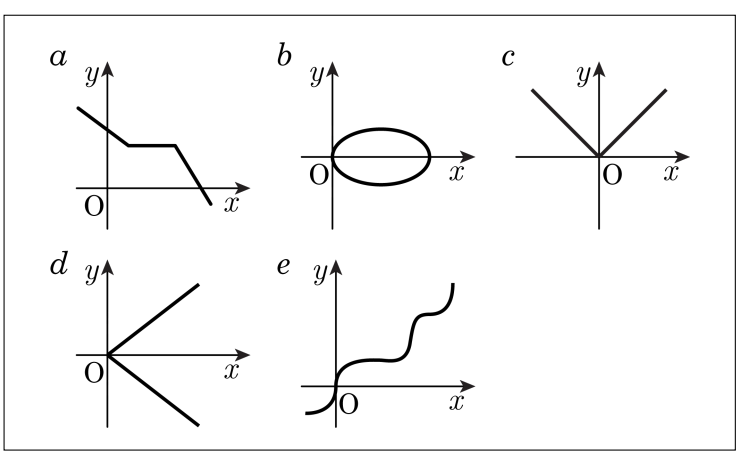
1. 다음 그래프 중 함수인 것은?



① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

[a] 함수 [b] 함수가 아니다. [c] 함수 [d] 함수가 아니다. [e] 함수
따라서 [a], [c], [e] 만이 함수이다.

2. $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$, $f(x) = |2x - 3|$으로 주어질 때, 다음 중 $f(X)$의 원소가 아닌 것은 무엇인가? (단, $f(X)$는 함수 f의 치역)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$f(x) = |2x - 3|$에서
$f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(3) = 3,\ f(4) = 5,\ f(5) = 7$ 이므로
$f(X) = \{1, 3, 5, 7\}$
$\therefore\ 2 \notin f(X)$

3. 집합 $X = \{x|x\text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \cdots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

① 100 ② 50 ③ 38 ④ 20 ⑤ 10

해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,
$f(1) = F(3) = \cdots = F(19) = 2$
$\therefore f(1) + f(3) + \cdots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$

4. 두 집합 $X = \{a,\ b,\ c\}$, $Y = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수를 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$a,\ b,\ c$ 에 대응하는 원소를
순서쌍 $(f(a),\ f(b),\ f(c))$ 으로 나타내면
$(1,2,3),\ (1,3,2),\ (2,1,3),\ (2,3,1),\ (3,1,2),$
$(3,2,1)$ 이므로
X 에서 Y 로의 함수 중 일대일 대응인 것의 개수는 6 개이다.

5. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$

④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

6. 두 함수 $f(x)=x^2-x$, $g(x)=2x+1$에 대하여 $(f\circ g\circ f)(1)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$f(1)=0$이므로 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(0)=1$

$\therefore\ (f\circ g\circ f)(1)=f(1)=0$

7. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$ ② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$ ④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$
$f(a)+f(b)=|a|+|b|$
이 때 $|a+b|\le|a|+|b|$

② $f\ (a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$
$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$
$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤ $f(a+b) = (a+b)^3+3(a+b)$
$= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3)$
$f(a)+f(b) = a^3+3a+b^3+3b$
$= a^3+b^3+3(a+b)$
$= (a+b)(a^2-ab+b^2+3)$

8. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x)=2x^2-10x-5$, $g(x)=-x^2+2x+10$이 서로 같을 때, 집합 X의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x)=g(x)$이므로
$2x^2-10x-5=-x^2+2x+10$에서
$3x^2-12x-15=0$, $3(x^2-4x-5)=0$
$(x-5)(x+1)=0$
$\therefore\ x=5,\ -1$
즉, $x=5$ 또는 $x=-1$일 때 $f(x)=g(x)$이다.
$\therefore\ X=\{-1\},\ \{5\},\ \{-1,\ 5\}$

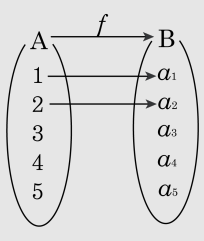
9. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개　② 25 개　③ 64 개

④ 81 개　⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수
$f : A \to B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중 하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)



10. 두 함수 $f(x) = -3x+k$, $g(x) = 2x+4$에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$가 성립하도록 하는 k의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$f(x) = -3x + k$, $g(x) = 2x + 4$에서

$(f \circ g)(x) = f(2x+4) = -3(2x+4) + k$

$= -6x - 12 + k \cdots$㉠

$(g \circ f)(x) = g(-3x+k) = 2(-3x+k) + 4$

$= -6x + 2k + 4 \cdots$㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$-6x - 12 + k = -6x + 2k + 4$

$\therefore k = -16$

11. 함수 $f(x)$가 $f(2x+1)=3x+2$를 만족할 때, $f(3)$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(2x+1)=3x+2$ 에서 $2x+1=3$ 이므로
$x=1$ 을 대입하면
$f(2\cdot 1+1)=f(3)=3\cdot 1+2=5$

12. 함수 $f(x) = -x,\ g(x) = 2x-1$ 일 때, $(h \circ g \circ f)(x) = f(x)$ 인 일차함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $y = \frac{1}{4}x + 2$ ② $y = \frac{1}{4}x - 2$ ③ $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 2$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면,
$(h \circ g \circ f)x = (h \circ g)(f(x)) = f(x)$ 에서 $h \circ g = I$
즉 $(h \circ g)(x) = x,\ a(2x-1) + b = x$
$x = 1$ 일 때, $a + b = 1$
$x = 0$ 일 때, $-a + b = 0$
$\therefore\ a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2}$
따라서 $h(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

13. R 가 실수 전체의 집합일 때, R 에서 R 로의 함수 f 를 다음과 같이 정의한다.

$$f : x \rightarrow a\,|\,x-1\,|+(2-a)x+a \quad (x \in R,\ a \in R)$$

함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$ ② $a \le -1$ ③ $a > -1$

④ $a < 1$ ⑤ $a \le 1$

해설

$f(x) = a|x-1|+(2-a)x+a$ 에서 $x \ge 1$, $x < 1$ 인 경우로 나누면,

$x \ge 1$ 일 때, $f(x) = a(x-1)+(2-a)x+a$

$x < 1$ 일 때, $f(x) = a(1-x)+(2-a)x+a$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 2x & (x \ge 1) \\ -2(a-1)x+2a & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 R 에서 R 로의 일대일 대응이려면

$x \ge 1$ 에서 기울기가 양이므로 $x < 1$ 에서도 기울기가 양이어야 한다.

즉, $-2(a-1) > 0$, $a-1 < 0$

$\therefore\ a < 1$

14. 함수 $f_n(x)$ (n 은 자연수)는 보기의 두 조건을 만족한다.

보기

㉠ $f_1(x) = \dfrac{1-x}{x+1}$

㉡ $f_n(x) = (f_{n-1} \circ f_1)(x)(n = 2, 3, 4, \cdots)$

이 때, $f_{2007}(2)$의 값은? (단, $x \neq -1$)

① $\dfrac{1}{3}$ ② 2 ③ $\dfrac{1}{5}$ ④ $-\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{7}{5}$

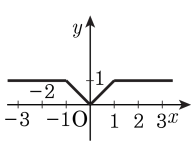
해설

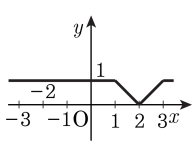
$f_1(2) = -\dfrac{1}{3}$, $f_2(2) = 2$, $f_3(2) = -\dfrac{1}{3}$, $f_4(3) = 2 \cdots$

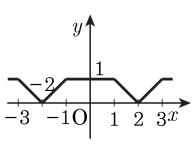
$\Rightarrow f_{2n}(2) = 2$, $f_{2n+1}(2) = -\dfrac{1}{3}$

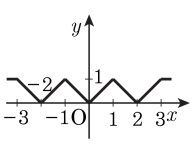
$\therefore f_{2007}(2) = -\dfrac{1}{3}$

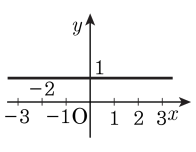
15. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 가 각각 $f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$, $g(x) = x - 2$ 일 때, 합성함수 $f \circ g$의 그래프는 ?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \geq 1) \\ |x| & (|x| < 1) \end{cases}$

$g(x) = x - 2$ 에서

$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 1 & (|x-2| \geq 1) \\ |x-2| & (|x-2| < 1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 1 & (x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 3) \\ |x-2| & (1 < x < 3) \end{cases}$