

1. $x \neq 0$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x}$ 을 간단히 하면?

- ① $\frac{1}{2x}$ ② $\frac{1}{6x}$ ③ $\frac{5}{6x}$ ④ $\frac{11}{6x}$ ⑤ $\frac{1}{6x^3}$

해설

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} = \frac{6}{6x} + \frac{3}{6x} + \frac{2}{6x} = \frac{11}{6x}$$

2. 분수식 $\frac{x}{x^2-4} \times \frac{x-2}{x^2+2x}$ 의 계산 결과는?

① $\frac{-1}{(x+2)^2}$

② $\frac{1}{(x+2)^2}$

③ $\frac{2}{(x+2)^2}$

④ $\frac{-1}{x(x+2)^2}$

⑤ $\frac{1}{x(x+2)^2}$

해설

$$\frac{x}{(x+2)(x-2)} \times \frac{x-2}{x(x+2)} = \frac{1}{(x+2)^2}$$

3. $x, y, y - \frac{1}{x}$ 이 모두 0이 아닐 때, $\frac{x - \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{x}}$ 을 간단히 하면?

① 1

② $\frac{x}{y}$

③ $\frac{y}{x}$

④ $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

⑤ $xy - \frac{1}{xy}$

해설

$$\frac{x - \frac{1}{y}}{y - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{xy - 1}{y}}{\frac{xy - 1}{x}} = \frac{x}{y}$$

4. $x : y = 1 : 3$ 일 때, $\frac{x^2 + y^2}{x(x + y)}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

$$y = 3x$$

$$\frac{x^2 + (3x)^2}{x(x + 3x)} = \frac{10x^2}{4x^2} = \frac{5}{2}$$

6. $\frac{x-2}{2x^2-5x+3} + \frac{3x-1}{2x^2+x-6} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2}$ 을 계산하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

(준 식)

$$\begin{aligned} &= \frac{x-2}{(2x-3)(x-1)} + \frac{3x-1}{(2x-3)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{x^2+x-2} \\ &= \frac{(x-2)(x+2) + (3x-1)(x-1)}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{4x^2-4x-3}{(2x-3)(x-1)(x+2)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-3)(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \frac{2x^2-5}{(x+2)(x-1)} \\ &= \frac{2x^2+2x-4}{(x+2)(x-1)} = 2 \end{aligned}$$

7. $x^2 \neq 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 을 만족시키는 상수 a 와 b 가 있다. 이때, $a+b$ 의 값은?

- ① -6 ② -3 ③ -1 ④ 2 ⑤ 4

해설

$\frac{x+6}{x^2-4} = \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2}$ 의 우변을 통분하여 계산하면

$$\begin{aligned} \frac{a}{x+2} - \frac{b}{x-2} &= \frac{a(x-2)}{x^2-4} - \frac{b(x+2)}{x^2-4} \\ &= \frac{(a-b)x - 2(a+b)}{x^2-4} \end{aligned}$$

따라서 $a-b=1$, $-2(a+b)=6$ 이므로 연립하여 풀면

$$a = -1, b = -2$$

$$\therefore a+b = -3$$

8. $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-a}}$ 을 계산하면?

- ① $-\frac{1}{a}$ ② -1 ③ 1 ④ $\frac{1}{a}$ ⑤ $a-1$

해설

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-a}} &= 1 - \frac{1}{\frac{1-a-1}{1-a}} \\ &= 1 - \frac{1-a}{-a} = \frac{a+1-a}{a} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

9. $\frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}}}$ 의 값은?

① 0

② 1

③ $\sqrt{2} - 1$

④ $\sqrt{2} + 1$

⑤ 2

해설

$$\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} - (\sqrt{2} + 1) = -1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2} - (-1)} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1$$

10. 다음 유리식을 간단히 하시오.

$$\frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}}$$

- ① 1 ② x ③ $-x$ ④ $\frac{1}{x}$ ⑤ $-\frac{1}{x}$

해설

$$\text{(준식)} = \frac{\frac{(1+x) + (1-x)}{(1-x)(1+x)}}{\frac{(1+x) - (1-x)}{(1-x)(1+x)}} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 $(1-x)(1+x)$ 를 곱하면
(준식)

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x) + \frac{1}{1+x}(1-x)(1+x)}{\frac{1}{1-x}(1-x)(1+x) - \frac{1}{1+x}(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{(1+x) + (1-x)}{(1+x) - (1-x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

11. $\frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}}$ 을 간단히 하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ $\frac{1}{2}$

해설

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}} \\ &= \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{2} - 1}} = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\therefore (1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1$$

12. 분수식 $\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a}}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}}$ 을 간단히 하면?

- ① 1 ② $1-a$ ③ $1-a^2$
④ $1+a^2$ ⑤ $1+a$

해설

$$\begin{aligned} \text{준식} &= \frac{1}{1-\frac{1}{a-1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{a+1}} \\ &= \frac{a-1}{a-1-a} \times \frac{a+1}{a+1-a} \\ &= \frac{a-1}{-1} \times \frac{a+1}{1} = 1-a^2 \end{aligned}$$

13. $x : y : z = 3 : 4 : 5$ 일 때, $\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{50}{47}$ ② $\frac{47}{50}$ ③ $\frac{49}{50}$ ④ $\frac{24}{25}$ ⑤ $\frac{26}{25}$

해설

$$x : y : z = 3 : 4 : 5 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k (k \neq 0)$$

$$\therefore x = 3k, y = 4k, z = 5k$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준식}) &= \frac{3k \cdot 4k + 4k \cdot 5k + 5k \cdot 3k}{(3k)^2 + (4k)^2 + (5k)^2} \\ &= \frac{47k^2}{50k^2} = \frac{47}{50} \end{aligned}$$

14. $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \neq 0$ 일 때, $\frac{x^2 - 8xy + y^2}{x^2 - y^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = a \neq 0 \text{ 라 하면}$$

$$x = 2a, y = 3a$$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 8xy + y^2}{x^2 - y^2} &= \frac{4a^2 - 48a^2 + 9a^2}{4a^2 - 9a^2} \\ &= \frac{-35a^2}{-5a^2} = 7 \end{aligned}$$

15. $\frac{x}{5} = \frac{y+4z}{2} = \frac{z}{3} = \frac{-x+2y}{A}$ 에서 A 의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: $A = -25$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{-x + 2(y + 4z) - 8 \times z}{-5 + 2 \times 2 - 8 \times 3} \\ &= \frac{-x + 2y + 8z - 8z}{-5 + 4 - 24} = \frac{-x + 2y}{-25} \\ \therefore A &= -25 \end{aligned}$$

16. 함수 $y = \frac{x-6}{x-4}$ 의 정의역은 $x \neq a$ 인 모든 실수이고 치역은 $y \neq b$ 인 모든 실수이다. 이때, $a-b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

함수 $y = \frac{x-6}{x-4}$ 의 정의역이 $x \neq a$ 인 모든 실수이고

치역이 $y \neq b$ 인 모든 실수이면 $x = a, y = b$ 는 점근선이다.

따라서 $y = \frac{(x-4)-2}{x-4} = \frac{-2}{x-4} + 1$ 에서

$a = 4, b = 1$ 이므로

$\therefore a - b = 4 - 1 = 3$

17. 함수 $y = \frac{bx-3}{x-a}$ 의 정의역은 $x \neq 4$ 인 모든 실수이고 치역은 $y \neq 2$ 인 모든 실수이다. 이때, $a+b$ 의 값은?

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

정의역은 $x \neq 4$ 인 모든 실수이고 치역은 $y \neq 2$ 인 모든 실수이므로,
 $a = 4$, $b = 2$ 이다.
 $\therefore a + b = 4 + 2 = 6$

18. 등식 $\frac{225}{157} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e}}}}$ 을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e

를 차례대로 구하여라.

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $a = 1$

▷ 정답: $b = 2$

▷ 정답: $c = 3$

▷ 정답: $d = 4$

▷ 정답: $e = 5$

해설

$$\begin{aligned} \frac{225}{157} &= 1 + \frac{68}{157} = 1 + \frac{1}{\frac{157}{68}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{21}{68}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} \\ \therefore a &= 1, b = 2, c = 3, d = 4, e = 5 \end{aligned}$$

19. $\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2}$ 이고, $\frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라. (단, $abc \neq 0$, p, q 는 서로소)

▶ 답:

▷ 정답: $p + q = 32$

해설

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{2} = k(k \neq 0) \text{로 놓으면}$$

$$a = 4k, b = 3k, c = 2k$$

$$\therefore \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{11}{21}$$

$$\therefore p + q = 11 + 21 = 32$$

20. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{5x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값은?

- ㉠ $\frac{5}{7}$ ㉡ $\frac{7}{5}$ ㉢ $\frac{3}{7}$ ㉣ $\frac{7}{3}$ ㉤ 1

해설

$$2x - y + z = 0 \cdots \text{㉠}$$

$$x - 2y + 3z = 0 \cdots \text{㉡}$$

㉠ - ㉡ $\times 2$ 에서 정리하면

$$y = \frac{5}{3}z$$

㉠ $\times 2$ - ㉡ 에서 정리하면

$$x = \frac{1}{3}z$$

$$\therefore x : y : z = \frac{1}{3}z : \frac{5}{3}z : z$$

$$= 1 : 5 : 3$$

$x = 1$, $y = 5$, $z = 3$ 을 대입하면

$$(\text{준식}) = \frac{5 - 5 + 25}{1 + 25 + 9} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

21. $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$ 를 만족하는 서로 다른 양수 x, y, z 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 는? (단, $x+y \neq 0$)

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

해설

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k \text{이고}$$

$$b+d+f \neq 0 \text{이면 } \frac{a+c+e}{b+d+f} = k (\because \text{가비의 리})$$

이것을 이용하면

$$\frac{x}{y} = \frac{y+(x+y)+x}{(x-z)+z+y} = \frac{2(x+y)}{x+y} = 2$$

22. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나고, 점근선의 방정식이 $x = 2, y = 1$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

점근선이 $x = 2, y = 1$ 이므로

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \cdots \textcircled{1}$$

①이 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -k + 1 \therefore k = 1$$

$$y = \frac{1+x-2}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\therefore a = 1, b = -1, c = -2$$

따라서 $abc = 2$

23. 분수함수 $y = \frac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선이 $x=1, y=6$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -5 ② 5 ③ -7 ④ 7 ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$y = \frac{bx+3}{x+a}$ 의 점근선은 $x=1, y=6$ 이므로

$$y = \frac{6(x-1)+9}{x-1} = \frac{9}{x-1} + 6$$

$$\therefore a = -1, b = 6$$

$$\therefore a + b = 5$$

24. $y = \frac{3x-1}{x-1}$ 의 점근선의 방정식은 $x=1, y=a$ 이다. a 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ -1 ⑤ -2

해설

$$y = \frac{3(x-1)+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 3$$

따라서 점근선의 방정식이 $x=1, y=3$ 이므로
 $a=3$

25. 곡선 $y = \frac{x+3}{x-3}$ 은 곡선 $y = \frac{6}{x}$ 을 x 축, y 축의 방향으로 각각 m, n 만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y = \frac{3x-1}{x+1}$ 의 점근선은 $x = a, y = b$ 이다. $m+n+a+b$ 의 값은?

- ① 6 ② 1 ③ 2 ④ -2 ⑤ -3

해설

$$y = \frac{x+3}{x-3} = 1 + \frac{6}{x-3}$$

$$y = \frac{6}{x} \text{ 의 그래프를}$$

x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{따라서 } m = 3, n = 1$$

$$\text{또, } y = \frac{3x-1}{x+1} = -\frac{4}{x+1} + 3 \text{ 에서}$$

$$\text{점근선은 } x = -1, y = 3 \quad a = -1, b = 3$$

따라서 구하는 합은 6

26. $y = \frac{ax+1}{x+b}$ 의 점근선이 $x=1, y=2$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y = \frac{ax+1}{x+b}$ 의 점근선이 $x=1, y=2$ 이므로

점근선 $x=1$ 에서 $y = \frac{ax+1}{x-1}$

점근선 $y=2$ 에서 $y = \frac{2x+1}{x-1}$

따라서 $a=2, b=-1$ 이므로

$\therefore a+b=2-1=1$

27. 유리함수 $y = \frac{bx+2}{ax+1}$ 의 그래프의 점근선이 두 직선 $x=2, y=3$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ -1 ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ 0

해설

$$y = \frac{bx+2}{ax+1}$$

$$= \frac{b(x+\frac{1}{a})+2-\frac{b}{a}}{a(x+\frac{1}{a})}$$

$$= \frac{b}{a} + \frac{2-\frac{b}{a}}{a(x+\frac{1}{a})}$$

점근선은 $x = -\frac{1}{a}, y = \frac{b}{a}$ 이므로

$$-\frac{1}{a} = 2, \frac{b}{a} = 3$$

$$\therefore a+b = -2$$

28. 분수식 $\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2+x}$ 를 간단히 하면?

① $\frac{x^2+1}{x(x+1)}$

③ $\frac{x^2+2}{x(x+1)}$

⑤ $\frac{x^2+1}{x(x+1)(x+1)}$

② $\frac{x^2+2}{x(x-1)}$

④ $\frac{x^2+1}{x(x-1)}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2+x} \\ &= \frac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2+1}{x^2+x} \\ &= \frac{2x^2+2}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^2+1}{x^2+x} \\ &= \frac{(2x^2+2)x - (x-1)(x^2+1)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{(x^2+1)(2x-x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{(x^2+1)(x+1)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{x^2+1}{x(x-1)} \end{aligned}$$

29. 양수 a, b 가 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ 을 만족할 때, $\frac{a^4+b^4}{a^2b^2} + 5$ 의 값을 구하면?

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} &= \frac{1}{a+b}, \quad \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a+b} \\ (b-a)(b+a) &= ab \\ \therefore b^2 - a^2 &= ab \\ b^2 - a^2 = ab \text{의 양변을 제곱하면} \\ a^4 - 2a^2b^2 + b^4 &= a^2b^2 \\ \therefore a^4 + b^4 &= 3a^2b^2 \\ \therefore \frac{a^4 + b^4}{a^2b^2} + 5 &= 3 + 5 = 8 \end{aligned}$$

30. 분수함수 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 의 그래프가 직선 $y = -x + k$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

- ① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

$$\begin{aligned} y &= \frac{x-1}{x-2} \\ &= \frac{(x-2)+1}{x-2} \\ &= \frac{1}{x-2} + 1 \end{aligned}$$

따라서, 점근선이

$x = 2, y = 1$ 인 분수함수이므로 그래프는

다음과 같다.

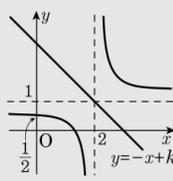
다음 그래프가 직선 $y = -x + k$ 에 대하여

대칭이려면

직선이 두 점근선의 교점인 $(2, 1)$ 을 지나야 하므로

$$1 = -2 + k$$

$$\therefore k = 3$$



31. 함수 $y = \frac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 (p, q) 에 대하여 대칭이고, 동시에 $y = x + r$ 에 대하여 대칭이다. 이때, $p + q + r$ 의 값은?

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$y = \frac{2x+3}{x+4} = \frac{2(x+4)-5}{x+4} = \frac{-5}{x+4} + 2$$

따라서 $y = \frac{2x+3}{x+4}$ 의 그래프는 점 $(-4, 2)$ 에 대하여 대칭이고,
점 $(-4, 2)$ 를 지나고

기울기가 1인 직선 $y = x + 6$ 에 대하여 대칭이다.

$$\therefore p = -4, q = 2, r = 6$$

$$\therefore p + q + r = -4 + 2 + 6 = 4$$

32. 분수함수 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 의 그래프가 직선 $y = -x + a$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

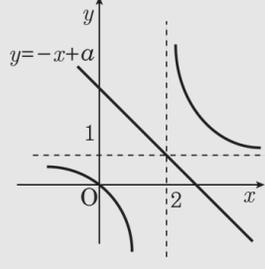
$$y = \frac{x-1}{x-2} = \frac{(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1$$

즉, 점근선이 $x = 2, y = 1$ 인 분수함수이므로 그래프는 다음 그림과 같다.

이 그래프가 직선 $y = -x + a$ 에 대하여 대칭이 되려면 직선 $y = -x + a$ 가 두 점근선의 교점인 $(2, 1)$ 을 지나야 하므로

$$1 = -2 + a$$

$$\therefore a = 3$$



33. $0 \leq x \leq 1$ 일 때, 함수 $y = \frac{x+2}{x+1}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. Mm 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$y = \frac{x+2}{x+1} = \frac{1}{x+1} + 1$$

$$x = 0 \text{일 때 최대이므로, } M = \frac{1}{0+1} + 1 = 2$$

$$x = 1 \text{일 때 최소이므로, } m = \frac{1}{1+1} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore Mm = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$