1. 이차방정식 $x^2 - mx + 2m + 1 = 0$의 한 근이 1일 때 다른 한 근은? (단, m은 상수)

① 3 ② 2 ③ 0 ④ -1 ⑤ -3

해설

$x^2 - mx + 2m + 1 = 0$에 $x = 1$을 대입하면
$1 - m + 2m + 1 = 0 \quad \therefore m = -2$
$x^2 + 2x - 3 = 0, \quad (x + 3)(x - 1) = 0$
$\therefore x = -3,\ 1$
따라서, 다른 근은 -3

2. 이차방정식 $x^2 - 3x - (k-1) = 0$이 실근을 갖게 하는 실수 k의 값으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$x^2 - 3x - (k-1) = 0$이 실근을 가지므로

$D = (-3)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (k-1) \geq 0$

$9 + 4k - 4 \geq 0,\ 4k \geq -5$

$\therefore\ k \geq -\frac{5}{4}$

3. 방정식 $2x^2 - 6x + 3 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$\alpha + \beta = 3$, $\alpha\beta = \dfrac{3}{2}$

$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2 \cdot \dfrac{3}{2} = 6$

4. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$
모든 x에 대해 성립하려면
$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$
공통근 : $a=1$

5. 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+4=0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D=0$

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-4=0$

$k^2-2k-3=0$, $(k-3)(k+1)=0$

$\therefore\ k=3,-1$

6. 이차방정식 $3x^2-6x+k=0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$ ② $k > 3$ ③ $k \le 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$3x^2-6x+k=0$

$\frac{D}{4} = 9-3k < 0$

$\therefore\ k > 3$

7. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$　② $a=0, b=3$　③ $a=-1, b=2$
④ $a=0, b=2$　⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.
$D' = (k-a)^2-(k^2+b-3)=0$
$\Rightarrow \quad -2ak+a^2-b+3=0$
모든 k 에 대해 성립하려면
$-2a=0,\ a^2-b+3=0$
$\therefore \quad a=0, b=3$

8. 이차식 $x^2 + 2x + 4$ 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$

② $(x + 1 - \sqrt{3})(x + 1 + \sqrt{3})$

③ $(x + 1 - \sqrt{2}i)(x + 1 + \sqrt{2}i)$

④ $(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

⑤ $(x - 1 - \sqrt{2}i)(x - 1 + \sqrt{2}i)$

해설

$x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 해를 구하면
$x = -1 \pm \sqrt{1 - 4} = -1 \pm \sqrt{3}i$
$\therefore x^2 + 2x + 4$
$= \left\{x - (-1 + 3\sqrt{i}\right\} \left\{x - (-1 - \sqrt{3}i)\right\}$
$= (x + 1 - \sqrt{3}i)(x + 1 + \sqrt{3}i)$

9. 다음 내용은 이차방정식에 대한 설명이다. 괄호 안에 알맞은 것은?

> (가) 를 계수로 갖는 이차방정식은 (나) 의 범위에서 항상 근을 갖는다. 따라서 (다) 를 계수로 갖는 이차식 ax^2+bx+c 는 (라) 의 범위에서는 반드시 (마) 의 곱으로 인수분해된다.

① (가) 복소수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 실수 (마) 이차식

② (가) 복소수 (나) 실수 (다) 복소수 (라) 실수 (마) 일차식

③ (가) 복소수 (나) 실수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

④ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 이차식

⑤ (가) 실수 (나) 복소수 (다) 실수 (라) 복소수 (마) 일차식

해설

(가) 실수, (나) 복소수, (다) 실수, (라) 복소수, (마) 일차식

10. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근
② 한 실근과 한 허근
③ 서로 다른 두 실근
④ 서로 같은 두 실근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면
$D'=4+a-b=0$
$\therefore b=a+4$
$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$
$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$
$D'=(a-1)^2-(a^2-2a+16)=-15<0$
$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

11. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-bx+a=0$의 두 근을 $\alpha+1,\ \beta+1$이라 한다. 이 때, 상수 $a,\ b$의 곱은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b\cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2-bx+a=0$ 의 두 근이 $\alpha+1,\ \beta+1$이므로
$(\alpha+1)+(\beta+1)=b,\ (\alpha+1)(\beta+1)=a$
즉, $\alpha+\beta+2=b,\ \alpha\beta+\alpha+\beta+1=a\cdots\cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면 $-a+2=b,\ b-a+1=a$
$\therefore a=1,\ b=1$
$\therefore ab=1$

12. x에 대한 이차방정식 $x^2-(k^2-3k-4)x+2-k=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, α는 양수이고 β는 음수이다. β의 절댓값이 α의 절댓값보다 클 때, 정수 k의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

(두 근의 합) $= k^2-3k-4=(k-4)(k+1)<0$
$-1<k<4$
(두 근의 곱) $= 2-k<0$에서 $k>2$
$\therefore 2<k<4$

13. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$ 이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a 의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 10　　⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{}$ 안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$ 가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$

$\therefore -4a = \pm 20$,

$a = \pm 5$

$\therefore$ 양수 a 는 5

14. 연립방정식 $\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+4xy+y^2=10 \end{cases}$ 의 한 쌍의 근을 $(\alpha,\ \beta)$라 할 때, $\alpha^2,\ \beta^2$을 두 근으로 갖는 이차 방정식으로 옳은 것은?

① $x^2-5x+3=0$
② $x^2+5x-3=0$
③ $x^2-5x+1=0$
④ $x^2+6x-1=0$
⑤ $x^2-6x+1=0$

해설

$\begin{cases} \alpha-\beta=2 & \cdots ㉠ \\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2=10 & \cdots ㉡ \end{cases}$ 이므로

㉠의 양변을 제곱하면

$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=4 \quad \cdots ㉢$

㉡ − ㉢에서

$\alpha\beta=1 \quad \cdots ㉣$

㉣을 ㉡에 대입하면 $\alpha^2+\beta^2=6,\ \alpha^2\beta^2=1$

$\therefore\ \alpha^2,\ \beta^2$을 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2-6x+1=0$

15. 실계수의 이차방정식 $x^2+bx+c=0$이 허근 α, β를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2+2\beta=1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

계수가 실수이므로

$\alpha=p+qi$ 이면 $\beta=p-qi$ $(q\neq 0)$

$\alpha^2+2\beta=1$ 이므로

$(p+qi)^2+2(p-qi)=1$ 에서

$(p^2-q^2+2p-1)+2q(p-1)i=0$

$\therefore p^2-q^2+2p-1=0,\ 2q(p-1)=0$

$q\neq 0$이므로

$p=1,\ q^2=2$

$\therefore\ \alpha+\beta=2p=2,\quad \alpha\beta=p^2+q^2=3$

$\therefore\ x^2-2x+3=0$

$\therefore\ b=-2,\ c=3$

$\therefore\ b+c=1$