

1. x 에 대한 항등식 $x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 곱 $abcd$ 의 값은?

- ① -2 ② 0 ③ 5 ④ 10 ⑤ 18

해설

$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$
 $= (x+1)[(x+1)(a(x+1)+b)+c]+d$ 임을 이용하여 조립제법을 사용하면

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 & & -1 & 1 & -1 \\
 -1 & 1 & -1 & 1 & -2 \leftarrow d \\
 & & -1 & 2 & \\
 -1 & 1 & -2 & 3 & \leftarrow c \\
 & & -1 & & \\
 & 1 & -3 & & \leftarrow b \\
 & \uparrow & & & \\
 & a & & &
 \end{array}$$

$\therefore abcd = 1 \times (-3) \times 3 \times (-2) = 18$

2. x^2+ax-9 와 x^2+bx+c 의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9 이다. $a-b+c$ 의 값을 구하여라. (단, a, b, c 는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$$A = x^2 + ax - 9 = Gp$$

$$B = x^2 + bx + c = Gq \text{라 하면}$$

$$A + B = (p + q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x + 1)(x - 3)$$

$$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x - 1) - 9(x - 1)$$

$$= (x - 1)(x^2 - 9) = (x - 1)(x + 3)(x - 3)$$

따라서, $G = x - 3, p = x + 3, q = x - 1$ 이다.

$$\therefore A = (x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$$

$$B = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$$

$$\therefore a = 0, b = -4, c = 3$$

$$\therefore a - b + c = 7$$

3. 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + ax + 1 > 0$ 이 항상 성립하도록 하는 정수 a 의 값의 개수는?

- ① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

모든 x 에 대해 $x^2 + ax + 1 > 0$ 이라면



위의 그림과 같이 되어야 하므로

판별식이 음수이어야 한다.

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \text{에서 } a^2 < 4$$

$$\therefore -2 < a < 2$$

$$\therefore a = -1, 0, 1 \text{ (3개)}$$

4. 두 점 A(-4, 2), B(1, 5)에서 같은 거리에 있고, y축 위에 있는 점 P의 좌표는?

① P(0, -2) ② P(0, -1) ③ P(0, 1)

④ P(0, 2) ⑤ P(0, $\frac{5}{2}$)

해설

점 P의 좌표를 P(0, b)라 하면 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로

$\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$ 에서

$$(-4-0)^2 + (2-b)^2 = (1-0)^2 + (5-b)^2$$

$$b^2 - 4b + 20 = b^2 - 10b + 26$$

$$6b = 6$$

$$\therefore b = 1$$

따라서 점 P의 좌표는 P(0, 1)이다.

5. 점 (3, 3) 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 두 원의 중심사이의 거리는?

- ① 15 ② 12 ③ 9 ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

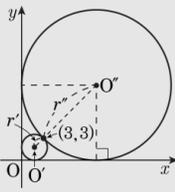
조건을 만족하는 원은 1 사분면 위에 존재하므로 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면, 구하는 원의 방정식은 $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$ 이 원이 점 (3, 3) 을 지나므로

$$(3-r)^2 + (3-r)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 - 12r + 18 = 0 \dots \text{㉠}$$

한편, 두 원이 점 (3, 3) 에서 서로 접하므로, 두 원의 중심사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합 $r' + r''$ 과 같다.

따라서, 근과 계수와의 관계에서 ㉠ 의 두 근의 합은 12 이다.



6. 제1사분면에서 x 축에 접하고 반지름의 길이가 2인 원 C_1 과 y 축에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_2 가 다음 조건을 만족할 때, 원 C_1 의 중심의 x 좌표와 원 C_2 의 중심의 y 좌표의 합을 구하면?

(가) 두 원 C_1, C_2 는 외접한다.
 (나) 두 원 C_1, C_2 의 중심을 지나는 직선의 기울기는 -1 이다.

- ① $1 + \sqrt{2}$ ② $2 + 2\sqrt{2}$ ③ $3 + 3\sqrt{2}$
 ④ $4 + 4\sqrt{2}$ ⑤ $5 + 5\sqrt{2}$

해설

두 원 C_1, C_2 의 방정식을 각각
 $(x-a)^2 + (y-2)^2 = 4 (a > 0)$
 $(x-1)^2 + (y-b)^2 = 1 (b > 0)$ 로 놓을 수 있다.
 이 때, (가)에서 두 원이 외접하므로 두 원의 중심
 $A(a, 2), B(1, b)$ 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같다.

따라서, $\sqrt{(1-a)^2 + (b-2)^2} = 3$

양변을 제곱하면 $(a-1)^2 + (b-2)^2 = 9 \dots \dots \textcircled{7}$

(나)에서 직선 AB 의 기울기가 -1 이므로

$$\frac{b-2}{1-a} = -1$$

$$b-2 = a-1$$

$$\therefore b = a+1 \dots \dots \textcircled{8}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$(a-1)^2 + (a-1)^2 = 9$$

$$2a^2 - 4a - 7 = 0$$

$$\therefore a = 1 \pm \frac{3\sqrt{2}}{2} (a > 0)$$

$$\textcircled{8} \text{에서 } b = a+1 = 2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a+b = 3 + 3\sqrt{2}$$

7. 두 원 $x^2 + y^2 - 2ay + 8a - 25 = 0$ 와 $x^2 + y^2 = 1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$$\Rightarrow x^2 + (y - a)^2 = a^2 - 8a + 25, \quad x^2 + y^2 = 1$$

중심사이의 거리 : a

$$\text{반지름의 합} : 1 + \sqrt{a^2 - 8a + 25}$$

$$\Rightarrow a - 1 = \sqrt{a^2 - 8a + 25}$$

$$\Rightarrow a = 4$$

8. 다음에서 원과 직선이 접하는 것은?

① $x^2 + y^2 = 4$, $x - y + 3 = 0$

② $x^2 + y^2 = 16$, $x - y + 5 = 0$

③ $x^2 + y^2 = 5$, $2x - y - 5 = 0$

④ $x^2 + y^2 = 3$, $x - 2y + 3 = 0$

⑤ $x^2 + y^2 = 4$, $x + y - 2 = 0$

해설

① $(0, 0)$, $r = 2$, $d = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore d > r$

② $(0, 0)$, $r = 4$, $d = \frac{5}{\sqrt{2}}$

$\therefore d < r$

③ $(0, 0)$, $r = \sqrt{5}$, $d = \sqrt{5}$

$\therefore r = d$

④ $(0, 0)$, $r = \sqrt{3}$, $d = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore r > d$

⑤ $(0, 0)$, $r = 2$, $d = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$\therefore r > d$

9. 직선 $y = 2x + k$ 와 원 $x^2 - 4x + y^2 = 21$ 이 만나는 두 교점 사이의 거리가 최대일 때, 상수 k 의 값은?

① -1 ② -4 ③ 4 ④ 10 ⑤ -10

해설

주어진 원은 $(x - 2)^2 + y^2 = 25$ 이므로
중심의 좌표는 $(2, 0)$ 이다. 두 교점 사이의 거리의
최댓값은 직선 $y = 2x + k$ 가 원의 중심 $(2, 0)$ 을 지날 때이므로
 $k = -4$

10. 전체집합 U 의 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 43$, $n(A) = 20$, $n(B) = 25$ 이고 $n((A \cup B)^c) = 3$ 일 때, 다음 중 $n(A^c \cup B)$ 는?

- ① 10 ② 28 ③ 30 ④ 38 ⑤ 40

해설

$$\begin{aligned}n(A \cup B) &= n(U) - n((A \cup B)^c) \\ &= 43 - 3 \\ &= 40\end{aligned}$$

$$n(A \cap B) = 5$$

$$n(A^c \cup B) = 25 + 3 = 28$$

11. $a^2 - b^2 = 2$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은?

- ① 2^n ② 2^{n+1} ③ 2^{n+2} ④ 2^{n+3} ⑤ 2^{n+4}

해설

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= A, (a-b)^n = B \\(\text{준식}) &= (A^2 + 2AB + B^2) - (A^2 - 2AB + B^2) \\&= 4AB \\&= 4\{(a+b)(a-b)\}^n \\&= 4 \times 2^n \\&= 2^{n+2}\end{aligned}$$

12. $xy(x-y) + yz(y-z) + zx(z-x)$ 을 인수분해하면?

- ① $-(x-y)(y-z)(z-x)$ ② $-(x+y)(y-z)(z-x)$
③ $-(x-y)(y+z)(z-x)$ ④ $-(x-y)(y-z)(z+x)$
⑤ $-(x-y)(y+z)(z+x)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= xy(x-y) + zx(z-x) + yz(y-z) \\ &= yx^2 - y^2x + z^2x - zx^2 + yz(y-z) \\ &= (y-z)x^2 - (y^2-z^2)x + yz(y-z) \\ &= (y-z)x^2 - (y+z)(y-z)x + yz(y-z) \\ &= (y-z)\{x^2 - (y+z)x + yz\} \\ &= (y-z)(x-y)(x-z) \\ &= -(x-y)(y-z)(z-x)\end{aligned}$$

13. 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, PQ 의 길이는?
(단, k 는 상수)

- ① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 7 ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
 직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
 P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
 즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots \textcircled{1}$ 의 두 실근과 같다.
 점 P 의 x 좌표가 -3 이므로
 $\textcircled{1}$ 에 $x = -3$ 을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
 $\therefore k = 5$
 $k = 5$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
 $(x + 3)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$
 따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
 두 점 P, Q 가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
 $P(-3, 2), Q(2, 7)$
 $\therefore \overline{PQ} = \sqrt{\{2 - (-3)\}^2 + (7 - 2)^2} = \sqrt{50}$
 $= 5\sqrt{2}$

14. 이차방정식 $x^2 + 2kx + k = 0$ 의 두 근이 모두 -1 과 1 사이에 있기 위한 k 값의 범위가 $a < k \leq b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$D/4 = k^2 - k \geq 0, k(k-1) \geq 0, \therefore k \leq 0, k \geq 1$$

$$f(x) = x^2 + 2kx + k \text{라 하면}$$

$$f(-1) = 1 - k > 0$$

$$\therefore k < 1$$

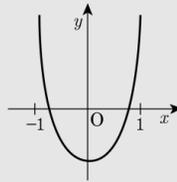
$$f(1) = 1 + 3k > 0 \therefore k > -\frac{1}{3}$$

$$\text{대칭축 } x = -k \text{ 이므로 } -1 < -k < 1$$

$$\therefore -1 < k < 1$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < k \leq 0$$

$$\therefore ab = 0$$



15. 집합 A, B, C, D, E 의 관계가 보기와 같을 때, 다음 중 옳은 것은?

보기

$$A \subset C, B \subset C, C \subset E, D \subset E$$

- ① 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이다.
- ② 집합 B 는 집합 D 의 부분집합이다.
- ③ $D \subset C$ 이면, $B \subset D$ 이다.
- ④ $E \subset D$ 이면, $A \subset D$ 이다.
- ⑤ 집합 B 와 집합 E 는 같을 수 없다.

해설

- ① 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이다. → 알 수 없다.
- ② 집합 B 는 집합 D 의 부분집합이다. → 알 수 없다.
- ③ $D \subset C$ 이면, $B \subset D$ 이다. → $D \subset B, B \not\subset D$ 일 수 있다.
- ④ $E \subset D$ 이면, $A \subset D$ 이다. → $E \subset D$ 이면, $D = E$ 이고 $A \subset E$ 이므로 $A \subset D$ 이다.
- ⑤ 집합 B 와 집합 E 는 같을 수 없다. → $B = C = E$ 일 수 있다.

16. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ 라고 정의하자. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{1, 4\}$ 일 때, $n((A \times B) \cap (A \times C))$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

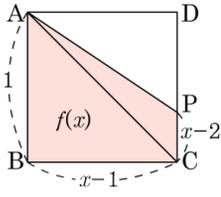
$$A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$$

$$A \times C = \{(1, 1), (1, 4), (2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$$

$$\therefore (A \times B) \cap (A \times C) = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4)\}$$

$$\therefore n((A \times B) \cap (A \times C)) = 3$$

17. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P 가 있다. 점 P 는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B 를 돌아 다시 점 A 로 돌아온다. 점 P 가 움직인 거리를 x , 선분 AP 가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$ 라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



- ①
- ②
- ③
- ④
- ⑤

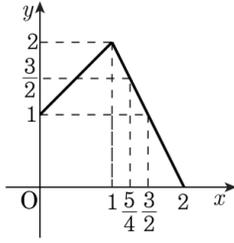
해설

x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \leq x \leq 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \leq x \leq 3) \\ 1 & (3 \leq x \leq 4) \end{cases}$$

한편, 각 구간의 경계점에서 함수는 연속이므로 ②가 옳다.

18. $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때,
 $f^{2008}\left(\frac{5}{4}\right)$ 의 값은?(단, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) =$
 $f(f^2(x)) \dots f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, n 은 자연수)



- ① 0 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ 2

해설

함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right) = 1, f(1) = 2$$

$f(2) = 0, f(0) = 1$ 이므로

$$f^2\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

$$f^3\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^2\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(1) = 2$$

$$f^4\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^3\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(2) = 0$$

$$f^5\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^4\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(0) = 1$$

$$f^6\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^5\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(1) = 2 \dots$$

따라서, $f^n\left(\frac{5}{4}\right)$ 은

$\frac{3}{2}, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots$ 와 같이 $n \geq 2$ 일 때, 1, 2, 0 의 값이 반복되므로

$$\therefore f^{2008}\left(\frac{5}{4}\right) = f^{3 \times 668 + 4}\left(\frac{5}{4}\right) = f^4\left(\frac{5}{4}\right) = 0$$

19. 다항함수 $f(x) = \frac{x-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{x-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$ 의 값은?

- ① $a+b+c$ ② $a^2+b^2+c^2$ ③ $a^3+b^3+c^3$
 ④ $ab+bc+ca$ ⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면
 (분자)
 $= \{(x-a)(b-c) + (x-b)(c-a) + (x-c)(a-b)\}$
 $= (b-c+c-a+a-b)x$
 $+ (-ab+ac-bc+ab-ca+cb) = 0$
 $\therefore f(x) = 0 \quad \therefore f(2013) = 0$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로
 a, b, c 는 서로 다른 수이고
 $f(a) = \frac{a-b}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$
 $= \frac{-1}{b-c} + \frac{1}{b-c} = 0$
 $f(b) = \frac{b-a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$
 $= \frac{-1}{a-c} + \frac{1}{a-c} = 0$
 그런데 $f(x)$ 는 일차이하의 함수이고
 $f(a) = f(b) = 0$ 이므로
 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = 0$ 이다.
 $\therefore f(2013) = 0$

20. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{a}{100} \cdot \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 101} = \frac{b}{101}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 149

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \\ & \quad \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} \\ &= \frac{99}{100} = \frac{a}{100} \\ &\therefore a = 99 \\ & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 101} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99}\right) + \\ & \quad \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{101}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{101} = \frac{50}{101} = \frac{b}{101} \\ &\therefore b = 50 \\ &\therefore a + b = 149 \end{aligned}$$

21. 함수 $y = \frac{x+1}{x-2}$ 의 그래프에서 점근선의 방정식을 $x = a, y = b$ 라 할

때, 함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 역함수의 최솟값을 구하면?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$$

\therefore 점근선은 $x = 2, y = 1$

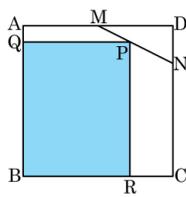
$\therefore a = 2, b = 1$

$y = \sqrt{2x+1}$ 의 $(x \geq -\frac{1}{2})$ 역함수는

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \quad (x \geq 0)$$

\therefore 최솟값은 $-\frac{1}{2}$

22. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 변 AD의 중점을 M, 변 CD의 사등분점 중 D에 가장 가까운 점을 N이라 하고, 선분 MN 위의 한 점 P에서 변 AB, BC에 내린 수선을 발을 각각 Q, R라 하자. 직사각형 BRPQ의 넓이가 최대가 될 때, \overline{PR} 의 길이를 구하여라.

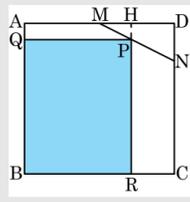


▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\overline{PR} = x$ 라 하고, 점 P에서 변 AD에 선분 PR의 연장선을 긋고, 점 H라 하자.



$$\overline{HP} = 4 - x$$

$$\overline{HP} : \overline{DN} = \overline{MH} : \overline{MD}$$

$$(4 - x) : 1 = \overline{MH} : 2$$

$$\therefore \overline{MH} = 8 - 2x$$

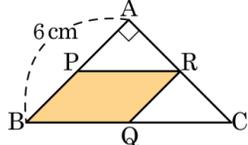
$$\therefore \square BRPQ = x(10 - 2x) = -2x^2 + 10x$$

함수 $f(x) = -2x^2 + 10x$ 의 최댓값은 $3 \leq x \leq 4$ 이므로

$\therefore x = 3$ 일 때, 최댓값 12를 갖는다.

따라서 $\overline{PR} = 3$ 이다.

23. 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC의 \overline{AB} 위에 점 P를 잡고, 점 P에서 \overline{AC} , \overline{BC} 와 평행한 직선을 그어 \overline{BC} , \overline{AC} 와 만나는 점을 각각 Q, R라 한다. $\square PBQR$ 의 넓이가 최대가 될 때, \overline{BP} 의 길이를 구하여라.



▶ 답: cm

▷ 정답: 3 cm

해설

$$\begin{aligned}
 \overline{BP} &= x \text{라 놓으면} \\
 \square PBQR &= \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle RQC) \\
 &= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \left\{ \frac{1}{2} \times (6-x)^2 + \frac{1}{2} x^2 \right\} \\
 &= 18 - (x^2 - 6x + 18) \\
 &= -x^2 + 6x \\
 &= -(x-3)^2 + 9
 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{BP} = 3\text{cm}$ 일 때, $\square PBQR$ 의 넓이가 최대가 된다.

24. 연립부등식

$$\begin{cases} x + 2y \geq a + 2 \\ y + 2z \geq 2(a + 4) \\ z + 2x \geq a + 5 \end{cases}$$

의 해 x, y, z 가 $x + y + z = 9$ 를 만족할 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{cases} x + 2y \geq a + 2 \\ y + 2z \geq 2(a + 4) \\ z + 2x \geq a + 5 \end{cases}$$

위 부등식을 변변 더하면 $3(x + y + z) \geq 4a + 15$

$x + y + z = 9$ 이므로 $27 \geq 4a + 15$

$\therefore a \leq 3$

따라서 a 의 최댓값은 3 이다.

25. 두 원 $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + (y-2)^2 = 4$ 의 공통접선의 방정식을 $y = ax + b$ 라고 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원의 중심에서 직선 $y = ax + b$ 까지의 거리가 반지름과 같으면 되므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 1 \iff b^2 = a^2 + 1 \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2 \iff (b-2)^2 = 4(a^2 + 1) \dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $b^2 \geq 1$ 임을 유의하면
 $b = -2$, $a^2 = 3$

따라서 $a^2 + b^2 = 7$

해설

중심 $C_1(0, 0)$ 과 직선 $ax - y + b = 0$

사이의 거리는 $\frac{|a \cdot 0 - 1 \cdot 0 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = \frac{|b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$

반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1, |b| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\therefore b^2 = a^2 + 1 \dots \textcircled{1}$$

중심 $C_2(0, 2)$ 와 직선 $ax - y + b = 0$

사이의 거리는

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 2, |b-2| = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$b^2 - 4b = 4a^2 \dots \textcircled{2}$$

① $\times 4 -$ ② 에서

$$3b^2 + 4b - 4 = 0, (3b-2)(b+2) = 0$$

$$\therefore b = \frac{2}{3}, -2$$

이 때 $b^2 = a^2 + 1 \geq 1$ 에서 $b = -2$

이것을 ②에 대입하면 $a^2 = 3$

$$\therefore a^2 + b^2 = 3 + 4 = 7$$

26. 전체집합 U 의 부분집합인 집합 A, B, C 의 원소의 개수는 각각 9개, 10개, 11개이다. $(A - B) \cup (B^c \cup C)^c = \emptyset$ 일 때, $n(B \cap C) - n(A \cup B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$$(A - B) \cup (B^c \cup C)^c = \emptyset \text{ 이므로}$$

$$A - B = \emptyset \rightarrow A \subset B$$

$$(B^c \cup C)^c = \emptyset \rightarrow B - C = \emptyset \rightarrow B \subset C$$

$$\therefore n(B \cap C) - n(A \cup B) = n(B) - n(B) = 0$$

28. 양수 x, y, z 에 대하여 $x + 2y + 3z = 6$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z}$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} & 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z}\right) \\ &= (x + 2y + 3z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z}\right) \\ &= 3 + \left(\frac{2y}{x} + \frac{x}{2y}\right) + \left(\frac{3z}{2y} + \frac{2y}{3z}\right) + \left(\frac{x}{3z} + \frac{3z}{x}\right) \\ &\geq 3 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{x}{2y}} + 2\sqrt{\frac{3z}{2y} \cdot \frac{2y}{3z}} + 2\sqrt{\frac{x}{3z} \cdot \frac{3z}{x}} \\ &= 9 \text{ (단, 등호는 } x = 2y = 3z = 2 \text{ 일 때 성립)} \\ &\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} \text{ 의 최솟값은 } \frac{3}{2} \end{aligned}$$

29. 무리식 $\sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots}}}} = p, 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\dots}}}} = q$

라 할 때, $p + q$ 의 값을 구하라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

(i) $\sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots}}}} = x$ 라 두면
 $\sqrt{6 - x} = x$ 양변을 제곱하면
 $x^2 = 6 - x, x^2 + x - 6 = 0, (x + 3)(x - 2) = 0$
 $\therefore x = -3, 2$
 여기서 $x > 0$ 이므로 $x = 2$
 $\therefore p = 2$

(ii) 주어진 식을 a 라 하면
 $2 - \frac{1}{a} = a, a^2 - 2a + 1 = 0, (a - 1)^2 = 0$
 $\therefore a = 1 \quad \therefore q = 1$
 $\therefore p + q = 3$

30. 무리함수 $y = \sqrt{x+2} + 2$ 의 역함수를 $y = g(x)$ 라 할 때, 연립방정식

$$\begin{cases} y = \sqrt{x+2} + 2 \\ y = g(x) \end{cases} \text{의 근을 } x = \alpha, y = \beta \text{라 하자. 이 때, } \alpha^2 - 5\beta \text{의}$$

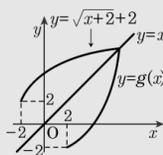
값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

두 함수 $y = \sqrt{x+2} + 2$, $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 그림과 같이 그 교점은 직선 $y = x$ 위에 있다.



즉, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2} + 2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근

은

$y = x$ 를 만족한다. ($\alpha = \beta$)

따라서, $y = \sqrt{x+2} + 2$ 와 $y = x$ 를 연립하면 된다.

$$x = \sqrt{x+2} + 2 \text{에서 } x - 2 = \sqrt{x+2}$$

$$x^2 - 4x + 4 = x + 2$$

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - 5\alpha + 2 = 0$$

$$\therefore \alpha^2 - 5\beta = \alpha^2 - 5\alpha \quad (\because \alpha = \beta)$$

$$= -2$$