1. x 에 대한 항등식$x^3 - 1 = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$ 를 만족하는 상수 a, b, c, d 의 곱 $abcd$ 의 값은?

① -2 ② 0 ③ 5 ④ 10 ⑤ 18

해설

$a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d$
$= (x+1)[(x+1)\{a(x+1)+b\}+c]+d$ 임을 이용하여 조립제법을 사용하면

$$
\begin{array}{r|rrrrll}
-1 & 1 & 0 & 0 & -1 & & \\
 & & -1 & 1 & -1 & & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & 1 & \boxed{-2} & \leftarrow & \mathrm{d} \\
 & & -1 & 2 & & & \\
\hline
-1 & 1 & -2 & \boxed{3} & \leftarrow & \mathrm{c} & \\
 & & -1 & & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{-3} & \leftarrow \mathrm{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & & &
\end{array}
$$

$\therefore\ abcd = 1 \times (-3) \times 3 \times (-2) = 18$

2. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A=x^2+ax-9=Gp$

$B=x^2+bx+c=Gq$라 하면

$A+B=(p+q)G=2x^2-4x-6=2(x+1)(x-3)$

$L=pqG=x^3-x^2-9x+9=x^2(x-1)-9(x-1)$

$=(x-1)(x^2-9)=(x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G=x-3$, $p=x+3$, $q=x-1$이다.

$\therefore\ A=(x+3)(x-3)=x^2-9$

$\quad B=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

$\therefore\ a=0,\ b=-4,\ c=3$

$\therefore\ a-b+c=7$

3. 모든 실수 x에 대하여 $x^2 + ax + 1 > 0$이 항상 성립하도록 하는 정수 a의 값의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

모든 x에 대해 $x^2 + ax + 1 > 0$이려면

위의 그림과 같이 되어야 하므로
판별식이 음수이어야 한다.

$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0$에서 $a^2 < 4$

$\therefore -2 < a < 2$

$\therefore\ a = -1, 0, 1$ (3개)

4. 두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 5)$에서 같은 거리에 있고, y축 위에 있는 점 P의 좌표는?

① $\mathrm{P}(0,\ -2)$ ② $\mathrm{P}(0,\ -1)$ ③ $\mathrm{P}(0,\ 1)$

④ $\mathrm{P}(0,\ 2)$ ⑤ $\mathrm{P}\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$

해설

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(0,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$에서

$(-4-0)^2 + (2-b)^2 = (1-0)^2 + (5-b)^2$

$b^2 - 4b + 20 = b^2 - 10b + 26$

$6b = 6$

$\therefore\ b = 1$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(0,\ 1)$이다.

5. 점 $(3,3)$ 을 지나고 x 축, y 축에 동시에 접하는 두 원의 중심사이의 거리는?

① 15 ② 12 ③ 9 ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

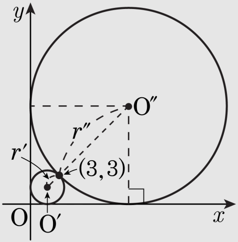
해설

조건을 만족하는 원은 1 사분면 위에 존재하므로 x 축, y 축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r 라 하면, 구하는 원의 방정식은 $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(3,\ 3)$ 을 지나므로

$(3-r)^2+(3-r)^2=r^2$

$\therefore r^2-12r+18=0\cdots$ ㉠



한편, 두 원이 점 $(3,3)$ 에서 서로 접하므로, 두 원의 중심사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합 $r'+r''$ 과 같다.

따라서, 근과 계수와의 관계에서 ㉠ 의 두 근의 합은 12 이다.

6. 제1 사분면에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 2인 원 C_1과 y축에 접하고 반지름의 길이가 1인 원 C_2가 다음 조건을 만족할 때, 원 C_1의 중심의 x좌표와 원 C_2의 중심의 y좌표의 합을 구하면?

> (가) 두 원 C_1, C_2는 외접한다.
> (나) 두 원 C_1, C_2의 중심을 지나는 직선의 기울기는 -1이다.

① $1+\sqrt{2}$　② $2+2\sqrt{2}$　③ $3+3\sqrt{2}$
④ $4+4\sqrt{2}$　⑤ $5+5\sqrt{2}$

해설

두 원 C_1, C_2의 방정식을 각각
$(x-a)^2+(y-2)^2=4\,(a>0)$
$(x-1)^2+(y-b)^2=1\,(b>0)$로 놓을 수 있다.
이 때, (가)에서 두 원이 외접하므로 두 원의 중심
$\mathrm{A}(a,2)$, $\mathrm{B}(1,b)$사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같다.

따라서, $\sqrt{(1-a)^2+(b-2)^2}=3$

양변을 제곱하면$(a-1)^2+(b-2)^2=9\cdots\cdots$㉠
(나)에서 직선 AB의 기울기가 -1이므로

$$\frac{b-2}{1-a}=-1$$

$b-2=a-1$

$\therefore b=a+1\cdots\cdots$㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$(a-1)^2+(a-1)^2=9$
$2a^2-4a-7=0$

$\therefore a=1\pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$(a>0)

㉡에서 $b=a+1=2+\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a+b=3+3\sqrt{2}$

7. 두 원 $x^2+y^2-2ay+8a-25=0$ 와 $x^2+y^2=1$ 이 외접할 때 a 의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

두 원이 외접하면 중심 사이의 거리와 반지름의 합이 일치한다.

$\Rightarrow \quad x^2+(y-a)^2=a^2-8a+25, \quad x^2+y^2=1$

중심사이의 거리 : a

반지름의 합 : $1+\sqrt{a^2-8a+25}$

$\Rightarrow \quad a-1=\sqrt{a^2-8a+25}$

$\Rightarrow \quad a=4$

8. 다음에서 원과 직선이 접하는 것은?

① $x^2+y^2=4,\quad x-y+3=0$

② $x^2+y^2=16,\quad x-y+5=0$

③ $x^2+y^2=5,\quad 2x-y-5=0$

④ $x^2+y^2=3,\quad x-2y+3=0$

⑤ $x^2+y^2=4\ ,\ x+y-2=0$

해설

① $(0,\ 0),\ r=2,\ d=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ d>r$

② $(0,\ 0),\ r=4\ ,\ d=\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ d<r$

③ $(0,\ 0),\ r=\sqrt{5},\qquad d=\sqrt{5}$

$\therefore\ r=d$

④ $(0,\ 0),\ r=\sqrt{3},\ d=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ r>d$

⑤ $(0,\ 0),\ r=2,\ d=\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ r>d$

9. 직선 $y = 2x + k$와 원 $x^2 - 4x + y^2 = 21$이 만나는 두 교점 사이의 거리가 최대일 때, 상수 k의 값은?

① -1 ② -4 ③ 4 ④ 10 ⑤ -10

해설

주어진 원은 $(x-2)^2 + y^2 = 25$이므로
중심의 좌표는 $(2, 0)$이다. 두 교점 사이의 거리의
최댓값은 직선 $y = 2x + k$가 원의 중심 $(2, 0)$을 지날 때이므로
$k = -4$

10. 전체집합 U 의 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 43$, $n(A) = 20$, $n(B) = 25$ 이고 $n((A \cup B)^c) = 3$ 일 때, 다음 중 $n(A^c \cup B)$는?

① 10 ② 28 ③ 30 ④ 38 ⑤ 40

해설

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(U) - n(A \cup B)^c \\ &= 43 - 3 \\ &= 40 \end{aligned}$$

$n(A \cap B) = 5$

$n(A^c \cup B) = 25 + 3 = 28$

11. $a^2 - b^2 = 2$일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$의 값은?

① 2^n ② 2^{n+1} ③ 2^{n+2} ④ 2^{n+3} ⑤ 2^{n+4}

해설

$(a+b)^n = A,\ (a-b)^n = B$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \left(A^2 + 2AB + B^2\right) - \left(A^2 - 2AB + B^2\right)\\ &= 4AB\\ &= 4\left\{(a+b)(a-b)\right\}^n\\ &= 4 \times 2^n\\ &= 2^{n+2}\end{aligned}$$

12. $xy(x-y)+yz(y-z)+zx(z-x)$ 을 인수분해하면?

① $-(x-y)(y-z)(z-x)$ ② $-(x+y)(y-z)(z-x)$

③ $-(x-y)(y+z)(z-x)$ ④ $-(x-y)(y-z)(z+x)$

⑤ $-(x-y)(y+z)(z+x)$

해설

(준 식)$= xy(x-y)+zx(z-x)+yz(y-z)$

$= yx^2-y^2x+z^2x-zx^2+yz(y-z)$

$= (y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)$

$= (y-z)x^2-(y+z)(y-z)x+yz(y-z)$

$= (y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$= (y-z)(x-y)(x-z)$

$= -(x-y)(y-z)(z-x)$

13. 이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와 직선 $y = x + k$ 가 서로 다른 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 -3 일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 길이는? (단, k 는 상수)

① 5 ② $5\sqrt{2}$ ③ 7 ④ $7\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{5}$

해설

이차함수 $y = x^2 + 2x - 1$ 의 그래프와
직선 $y = x + k$ 가 두 점 P, Q 에서 만나므로
P, Q 의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 + 2x - 1 = x + k$
즉 $x^2 + x - 1 - k = 0 \cdots$ ㉠ 의 두 실근과 같다.
점 P 의 x좌표가 -3이므로
㉠에 $x = -3$을 대입하면 $9 - 3 - 1 - k = 0$
$\therefore\ k = 5$
$k = 5$ 를 ㉠에 대입하면 $x^2 + x - 6 = 0$
$(x + 3)(x - 2) = 0$
$\therefore\ x = -3$ 또는 $x = 2$
따라서 점 Q 의 x 좌표는 2 이다.
두 점 P, Q가 직선 $y = x + 5$ 위의 점이므로
$P(-3,\ 2),\ Q(2, 7)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\{2-(-3)\}^2 + (7-2)^2} = \sqrt{50}$$
$$= 5\sqrt{2}$$

14. 이차방정식 $x^2+2kx+k=0$의 두 근이 모두 -1과 1사이에 있기 위한 k값의 범위가 $a<k\le b$라 할 때, ab의 값은?

① -1　　② $-\frac{1}{2}$　　③ 0　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ 1

해설

$D/4=k^2-k\ge 0, k(k-1)\ge 0,\ \therefore\ k\le 0,\ \ k\ge 1$

$f(x)=x^2+2kx+k$라 하면

$f(-1)=1-k>0$

$\therefore\ k<1$

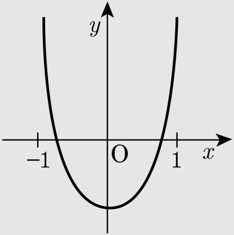
$f(1)=1+3k>0\ \therefore\ k>-\frac{1}{3}$

대칭축 $x=-k$ 이므로 $-1<-k<1$

$\therefore\ -1<k<1$

$\therefore -\frac{1}{3}<k\le 0$

$\therefore\ ab=0$



15. 집합 A, B, C, D, E 의 관계가 보기와 같을 때, 다음 중 옳은 것은?

보기

$A \subset C$, $B \subset C$, $C \subset E$, $D \subset E$

① 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이다.

② 집합 B 는 집합 D 의 부분집합이다.

③ $D \subset C$ 이면, $B \subset D$ 이다.

④ $E \subset D$ 이면, $A \subset D$ 이다.

⑤ 집합 B 와 집합 E 는 같을 수 없다.

해설

① 집합 A 는 집합 B 의 부분집합이다. → 알 수 없다.
② 집합 B 는 집합 D 의 부분집합이다. → 알 수 없다.
③ $D \subset C$ 이면, $B \subset D$ 이다. → $D \subset B$, $B \not\subset D$ 일 수 있다.
④ $E \subset D$ 이면, $A \subset D$ 이다. → $E \subset D$ 이면, $D = E$ 이고 $A \subset E$ 이므로 $A \subset D$ 이다.
⑤ 집합 B 와 집합 E 는 같을 수 없다. → $B = C = E$ 일 수 있다.

16. 공집합이 아닌 두 집합 A, B 에 대하여 $A \times B = \{(x,\ y) \mid x \in A,\ y \in B\}$ 라고 정의하자. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3\}$, $B = \{2,\ 3,\ 4\}$, $C = \{1,\ 4\}$ 일 때, $n((A \times B) \cap (A \times C))$ 를 구하여라.

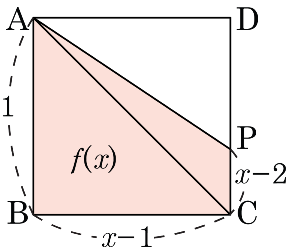
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

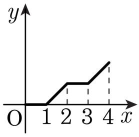
해설

$A \times B = \{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (3,\ 2),$
$(3,\ 3),\ (3,\ 4)\}$
$A \times C = \{(1,\ 1),\ (1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (2,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 4)\}$
$\therefore\ (A \times B) \cap (A \times C) = \{(1,\ 4),\ (2,\ 4),\ (3,\ 4)\}$
$\therefore\ n((A \times B) \cap (A \times C)) = 3$

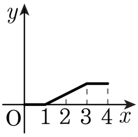
17. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 변 $ABCD$ 위를 움직이는 동점 P가 있다. 점 P는 A 점에서 출발, 일정한 속력으로 점 B를 돌아 다시 점 A로 돌아온다. 점 P가 움직인 거리를 x, 선분 AP가 지나간 부분의 넓이를 $f(x)$라 할 때, 다음 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형으로 옳은 것은?



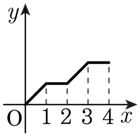
①



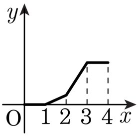
②



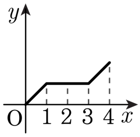
③



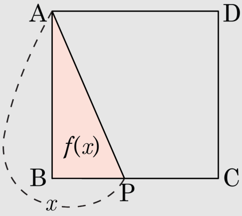
④



⑤



해설

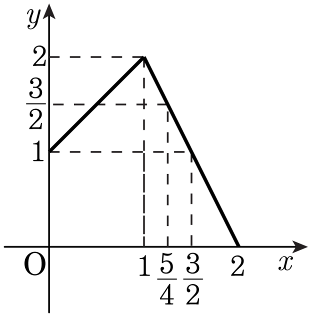


x 의 크기에 따른 넓이의 변화를 살펴보면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \le x \le 1) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (1 \le x \le 2) \\ \frac{1}{2}(x-1) & (2 \le x \le 3) \\ 1 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$$ 한편, 각 구간의 경계점에서

함수는 연속이므로 ②가 옳다.

18. $0 \le x \le 2$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $f^{2008}\left(\frac{5}{4}\right)$ 의 값은?(단, $f^1(x) = f(x)$, $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f^2(x))$ $\cdots$ $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, n은 자연수)



① 0　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$　　④ $\frac{5}{4}$　　⑤ 2

해설

함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서

$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{3}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, $f(1) = 2$

$f(2) = 0$, $f(0) = 1$ 이므로

$$f^2\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 1$$

$$f^3\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^2\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(1) = 2$$

$$f^4\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^3\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(2) = 0$$

$$f^5\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^4\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(0) = 1$$

$$f^6\left(\frac{5}{4}\right) = f\left(f^5\left(\frac{5}{4}\right)\right) = f(1) = 2 \cdots$$

따라서, $f^n\left(\frac{5}{4}\right)$ 은

$\frac{3}{2}$, 1, 2, ,0, 1, 2, 0, $\cdots$ 와 같이 $n \ge 2$ 일 때, 1, 2, 0 의 값이 반복되므로

$$\therefore\ f^{2008}\left(\frac{5}{4}\right) = f^{3\times668+4}\left(\frac{5}{4}\right) = f^4\left(\frac{5}{4}\right) = 0$$

19. 다항함수 $f(x)=\dfrac{x-a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{x-b}{(b-c)(b-a)}$ $+\dfrac{x-c}{(c-a)(c-b)}$ 일 때, $f(2013)$ 의 값은?

① $a+b+c$ ② $a^2+b^2+c^2$ ③ $a^3+b^3+c^3$

④ $ab+bc+ca$ ⑤ 0

해설

주어진 식을 통분하면

(분자)

$=\{(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)\}$

$=(b-c+c-a+a-b)x$

$+(-ab+ac-bc+ab-ca+cb)=0$

$\therefore\ f(x)=0 \quad \therefore\ f(2013)=0$

해설

주어진 식의 분모는 0이 아니므로

$a,\ b,\ c$는 서로 다른 수이고

$$f(a)=\frac{a-b}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-c}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{-1}{b-c}+\frac{1}{b-c}=0$$

$$f(b)=\frac{b-a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b-c}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{-1}{a-c}+\frac{1}{a-c}=0$$

그런데 $f(x)$는 일차이하의 함수이고

$f(a)=f(b)=0$이므로

모든 실수 x에 대하여 $f(x)=0$이다.

$\therefore\ f(2013)=0$

20. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 100}=\dfrac{a}{100}$, $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{99\cdot 101}=\dfrac{b}{101}$ 일 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 149

해설

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}$$
$$=\frac{99}{100}=\frac{a}{100}$$
$\therefore\ a=99$
$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 101}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{101}=\frac{50}{101}=\frac{b}{101}$$
$\therefore\ b=50$

$\therefore\ a+b=149$

21. 함수 $y = \dfrac{x+1}{x-2}$의 그래프에서 점근선의 방정식을 $x = a,\ y = b$라 할 때, 함수 $y = \sqrt{ax+b}$의 역함수의 최솟값을 구하면?

① -1　② $-\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{1}{2}$　④ 1　⑤ $\dfrac{3}{2}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{3}{x-2}$$

$\therefore$ 점근선은 $x = 2,\ y = 1$

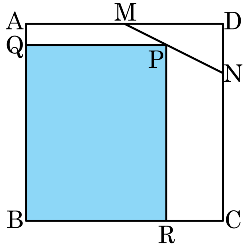
$\therefore\ a = 2,\ b = 1$

$y = \sqrt{2x+1}$의 $\left(x \geq -\dfrac{1}{2}\right)$ 역함수는

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\quad (x \geq 0)$$

$\therefore$ 최솟값은 $-\dfrac{1}{2}$

22. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 4 인 정사각형 ABCD 의 변 AD 의 중점을 M , 변 CD 의 사등분점 중 D 에 가장 가까운 점을 N 이라 하고, 선분 MN 위의 한 점 P 에서 변 AB , BC 에 내린 수선을 발을 각각 Q, R 라 하자. 직사각형 BRPQ 의 넓이가 최대가 될 때, $\overline{PR}$ 의 길이를 구하여라.

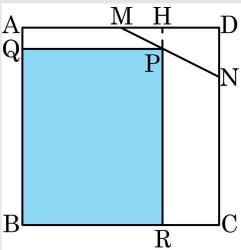


▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\overline{PR}=x$ 라 하고, 점 P 에서 변 AD 에 선분 PR 의 연장선을 긋고, 점 H 라 하자.



$\overline{HP}=4-x$

$\overline{HP}:\overline{DN}=\overline{MH}:\overline{MD}$

$(4-x):1=\overline{MH}:2$

$\therefore\ \overline{MH}=8-2x$

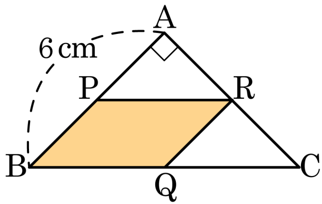
$\therefore\ \square BRPQ=x(10-2x)=-2x^2+10x$

함수 $f(x)=-2x^2+10x$ 의 최댓값은 $3\le x\le 4$ 이므로

$\therefore\ x=3$ 일 때, 최댓값 12 를 갖는다.

따라서 $\overline{PR}=3$ 이다.

23. 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC 의 $\overline{AB}$ 위에 점 P 를 잡고, 점 P 에서 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 와 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}, \overline{AC}$ 와 만나는 점을 각각 Q, R 라 한다. □PBQR 의 넓이가 최대가 될 때, $\overline{BP}$ 의 길이를 구하여라.



▶ **답 :** cm

▷ **정답 :** 3 cm

해설

$\overline{BP} = x$ 라 놓으면

$$\square PBQR = \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle RQC)$$
$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \left\{\frac{1}{2} \times (6-x)^2 + \frac{1}{2}x^2\right\}$$
$$= 18 - (x^2 - 6x + 18)$$
$$= -x^2 + 6x$$
$$= -(x-3)^2 + 9$$

따라서 $\overline{BP} = 3\text{cm}$ 일 때, □PBQR 의 넓이가 최대가 된다.

24. 연립부등식

$$\begin{cases} x+2y \geq a+2 \\ y+2z \geq 2(a+4) \\ z+2x \geq a+5 \end{cases}$$

의 해 x, y, z 가 $x+y+z=9$ 를 만족할 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$\begin{cases} x+2y \geq a+2 \\ y+2z \geq 2(a+4) \\ z+2x \geq a+5 \end{cases}$$

위 부등식을 변변 더하면 $3(x+y+z) \geq 4a+15$

$x+y+z=9$ 이므로 $27 \geq 4a+15$

$\therefore\ a \leq 3$

따라서 a 의 최댓값은 3 이다.

25. 두 원 $x^2+y^2=1,\ x^2+(y-2)^2=4$ 의 공통접선의 방정식을 $y=ax+b$ 라고 할 때, a^2+b^2 의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

원의 중심에서 직선 $y=ax+b$ 까지의 거리가 반지름과 같으면 되므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1 \Longleftrightarrow b^2=a^2+1\cdots ①$$

$$\frac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1}}=2 \Longleftrightarrow (b-2)^2=4(a^2+1)\cdots ②$$

①, ② 에서 $b^2\geq 1$ 임을 유의하면

$b=-2,\ a^2=3$

따라서 $a^2+b^2=7$

해설

중심 $C_1(0\ ,0)$ 과 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는 $\dfrac{|a\cdot 0-1\cdot 0+b|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}$

반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|b|}{\sqrt{a^2+1}}=1\ ,\ |b|=\sqrt{a^2+1}$

$\therefore\ b^2=a^2+1\cdots\cdots ①$

중심 $C_2\ (0,2)$ 와 직선 $ax-y+b=0$

사이의 거리는

$\dfrac{|b-2|}{\sqrt{a^2+1=2}}\ ,\ |b-2|=2\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$b^2-4b=4a^2\ \ \cdots\cdots ㉡$

㉠ $\times 4-$ ㉡ 에서

$3b^2+4b-4=0\ ,\ (3b-2)(b+2)=0$

$\therefore\ b=\dfrac{2}{3},\ -2$

이 때 $b^2=a^2+1\geq 1$ 에서 $b=-2$

이것을 ㉠에 대입하면 $a^2=3$

$\therefore a^2+b^2=3+4=7$

26. 전체집합 U 의 부분집합인 집합 A, B, C 의 원소의 개수는 각각 9 개, 10 개, 11 개이다. $(A-B)\cup(B^c\cup C)^c=\varnothing$ 일 때, $n(B\cap C)-n(A\cup B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$(A-B)\cup(B^c\cup C)^c=\varnothing$ 이므로

$A-B=\varnothing \rightarrow A\subset B$

$(B^c\cup C)^c=\varnothing \rightarrow B-C=\varnothing \rightarrow B\subset C$

$\therefore n(B\cap C)-n(A\cup B)=n(B)-n(B)=0$

27. 무한집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A \cup B$ 는 무한집합, A 는 유한집합일 때, 다음 중 반드시 유한집합을 모두 고르면 ? (정답 2개)

① $A^c \cap B$ ② $(A \cap B)^c$

③ $B \cup X = X$ 일 때, 집합 X ④ $A - B$

⑤ $A^c \cap B^c = \varnothing$ 일 때, B^c

해설

$A \cup B$ 는 무한집합, A 는 유한집합이므로 B 는 무한집합이다.
① $A^c \cap B \rightarrow A^c$ 도 B 도 무한집합이지만, 두 무한집합의 교집합은 무한집합일 수도 유한집합일 수도 있다.
② $(A \cap B)^c \rightarrow A \cap B$ 가 유한집합이므로 $(A \cap B)^c$ 는 무한집합이다.
③ $B \cup X = X$ 일 때, 집합$X \rightarrow B \subset X$ 이므로 무한집합이다.
④ $A - B$ 는 유한집합 차집합 무한집합이므로 항상 유한집합이다.
⑤ $A^c \cap B^c = \varnothing$ 일 때, $(A \cup B)^c = \varnothing$, $A \cup B = U$ 이므로 B^c 는 유한집합이다.

28. 양수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x+2y+3z=6$일 때, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}$의 최솟값은?

① $\dfrac{2}{3}$　② $\dfrac{4}{3}$　③ $\dfrac{3}{2}$　④ 2　⑤ 3

해설

$$6\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)$$
$$=(x+2y+3z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{3z}\right)$$
$$=3+\left(\frac{2y}{x}+\frac{x}{2y}\right)+\left(\frac{3z}{2y}+\frac{2y}{3z}\right)+\left(\frac{x}{3z}+\frac{3z}{x}\right)$$
$$\geq 3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{2y}}+2\sqrt{\frac{3z}{2y}\cdot\frac{2y}{3z}}+2\sqrt{\frac{x}{3z}\cdot\frac{3z}{x}}$$
$=9$ (단, 등호는 $x=2y=3z=2$ 일 때 성립)

$\therefore\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2y}+\dfrac{1}{3z}$ 의 최솟값은 $\dfrac{3}{2}$

29. 무리식 $\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\cdots}}}}=p$, $2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{\ddots}}}}=q$

라 할 때, $p+q$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

(i) $\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6}\cdots}}}=x$ 라 두면

$\sqrt{6-x}=x$ 양변을 제곱하면

$x^2=6-x,\ x^2+x-6=0,\ (x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3,\ 2$

여기서 $x>0$ 이므로 $x=2$

$\therefore p=2$

(ii) 주어진 식을 a 라 하면

$2-\dfrac{1}{a}=a,\ a^2-2a+1=0,\ (a-1)^2=0$

$\therefore a=1 \qquad \therefore q=1$

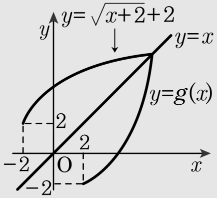
$\therefore p+q=3$

30. 무리함수 $y = \sqrt{x+2}+2$ 의 역함수를 $y=g(x)$ 라 할 때, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2}+2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근을 $x=\alpha,\ y=\beta$ 라 하자. 이 때, $\alpha^2 - 5\beta$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설



두 함수 $y = \sqrt{x+2}+2,\ y=g(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 그림과 같이
그 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

즉, 연립방정식 $\begin{cases} y = \sqrt{x+2}+2 \\ y = g(x) \end{cases}$ 의 근은
$y=x$ 를 만족한다. $(\alpha = \beta)$
따라서, $y = \sqrt{x+2}+2$ 와 $y=x$ 를 연립하면 된다.

$x = \sqrt{x+2}+2$ 에서 $x-2 = \sqrt{x+2}$

$x^2-4x+4 = x+2$

$x^2-5x+2=0$

$\therefore\ \alpha^2-5\alpha+2=0$

$\therefore\ \alpha^2-5\beta = \alpha^2-5\alpha\ (\because\ \alpha=\beta)$

$= -2$