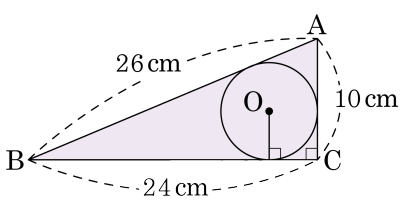
**1.** 다음 그림의 원 O는 $\overline{AB}$ = 26cm, $\overline{BC}$ = 24cm, $\overline{AC}$ = 10cm이고 $\angle C = 90°$인 직각삼각형에 내접하고 있다. 내접원 O의 반지름의 길이는?




① 1cm ② $\frac{3}{2}$cm ③ 2cm ④ $\frac{7}{2}$cm ⑤ 4cm

해설

원 O와 직각삼각형 ABC의 접점을 각각 D, E, F라고 하고, 원의 반지름을 $r$라고 하자. □CFOE가 정사각형이므로

$\overline{CF} = \overline{CE} = r$(cm)

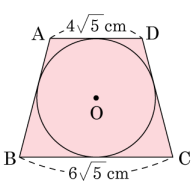
$\overline{BD} = \overline{BE} = \overline{BC} - \overline{CE} = 24 - r$(cm)

$\overline{AD} = \overline{AF} = \overline{AC} - \overline{CF} = 10 - r(cm)$

$\overline{AB} = \overline{BD} + \overline{AD}$, $26 = (24 - r) + (10 - r)2r = 8$

$\therefore r = 4$(cm)

**2.** 다음 그림에서 등변사다리꼴 ABCD 가 원 O 에 외접할 때, $\overline{AB}$ 의 길이는?




① $\sqrt{5}$cm ② $5\sqrt{5}$cm ③ $10\sqrt{5}$cm
④ $6\sqrt{5}$cm ⑤ $4\sqrt{5}$cm

해설

등변사다리꼴이므로 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 이고,
$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$ 성립하므로 $2\overline{AB} = 4\sqrt{5} + 6\sqrt{5}$
$\therefore \overline{AB} = 5\sqrt{5}$cm

**3.** 다음 그림에서 $\angle x + \angle y$ 의 크기는?

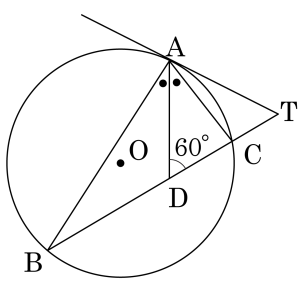



① 80° ② 90° ③ 100° ④ 110° ⑤ 120°

해설

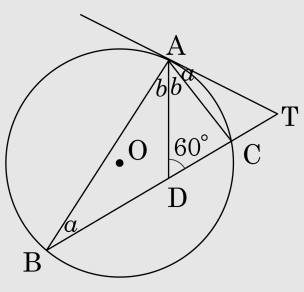
1) $4 : 20 = 12 : x$ , $\angle x = 60°$
2) $\gamma$ 는 $5.0\text{pt}\overset{\frown}{\text{AB}}$ 의 중심각 $\angle y = 40°$
$\therefore \angle x + \angle y = 100°$

**4.** 다음 그림에서 $\overline{AD}$ 는 $\angle BAC$ 의 이등분선이고, 선분 BC 의 연장선과 점 A 를 접점으로 하는 접선과의 교점을 T 라 한다. $\angle TDA = 60°$ 일 때, $\angle TAD$ 의 크기는?




① $30°$ ② $40°$ ③ $50°$
④ $60°$ ⑤ $70°$

해설




$\angle TAC = \angle ABC = a$
$\angle CAD = \angle BAD = b$
$\triangle ABD$ 에서 $a + b = 60°$
$\therefore\ \angle TAD = a + b = 60°$

**5.** 다음 그림에서 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ 는 원 O 의 접선이고, $\angle APB = 70°$ 일 때, $\angle BCA$ 의 크기는?




① 40° ② 45° ③ 50° ④ 55° ⑤ 60°

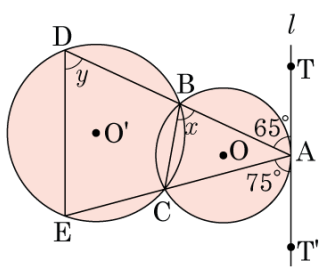
해설

$\triangle PAB$ 는 이등변삼각형이므로

$\angle PBA = (180° - 70°) \div 2 = 55°$

$\therefore \angle BCA = 55°$

**6.** 다음 그림에서 직선 $l$ 은 점 A 를 접점으로 하는 원 O 의 접선이다. $\overline{BC}$ 가 두 원 O, O′ 의 공통현이고 $\angle TAB = 65°$, $\angle T'AC = 75°$ 일 때, $\angle x - \angle y$ 의 크기는?

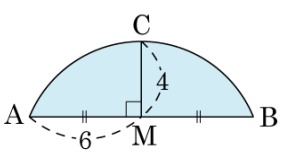



① 0° ② 5° ③ 10° ④ 15° ⑤ 20°

해설

$\overleftrightarrow{TT'}$ 은 원 O 의 접선이므로
$\angle x = \angle CAT' = 75°$
$\angle ACB = \angle BAT = 65°$
또, □BDEC 는 원 O 에 내접하므로
$\angle y = \angle ACB = 65°$
$\therefore\ \angle x - \angle y = 75° - 65° = 10°$

**7.** 다음 그림에서 원의 반지름의 길이는?



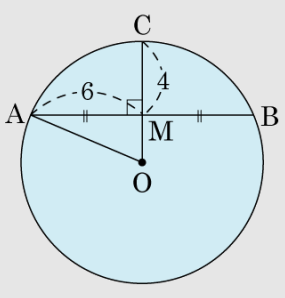

① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

해설

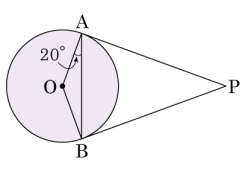
반지름을 $x$ 라 하면

$\overline{OM} = x-4$ , $x^2 = (x-4)^2+6^2$ ∴

$x = \frac{13}{2}$



**8.** 다음 그림의 원 O 에서 $\overline{PA}, \overline{PB}$ 은 접선이고, 두 점 A, B 은 접점이다. $\angle OAB = 20°$ 일 때, $\angle APB$ 의 크기는?

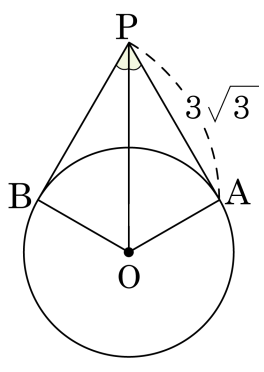



① 30° ② 40° ③ 45° ④ 50° ⑤ 20°

해설

$\angle PAO = \angle PBO = 90°$ , $\angle PAB = 90° - 20° = 70°$
$\triangle PAB$ 는 이등변삼각형이므로 $\angle APB = 180° - (70° \times 2) = 40°$

**9.** 점 A, B 는 원 O 의 접점이고 $\angle APB = 60°$ , $\overline{PA} = 3\sqrt{3}$ 일 때, $\overline{PO}$ 의 길이는?



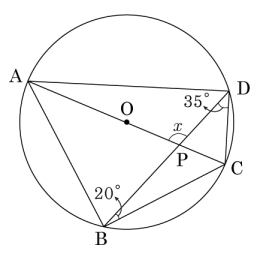

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$\triangle POA \equiv \triangle POB$ (RHS 합동)
따라서 $\angle APO = 30°$, $\angle POA = 60°$

$\overline{AO} = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 3$ , $\overline{PO} = 6$

**10.** 다음 그림에서 $\overline{AC}$ 는 원 O 의 지름이고 $\angle DBC = 20°$, $\angle BDC = 35°$ 일 때, $\angle APD$ 의 크기는?

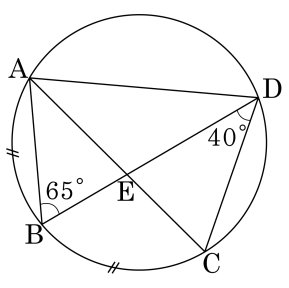



① 95° ② 100° ③ 105° ④ 110° ⑤ 115°

해설

반원에 대한 원주각 $\angle ABC = 90°$ 이고
또한, 5.0pt$\overset{\frown}{BC}$ 에 대한 원주각 $\angle BDC = \angle BAC = 35°$ 이므로
$\angle ACB = 180° - 90° - 35° = 55°$ 이다.
$\therefore$ $\angle APD = \angle BPC$(맞꼭지각) $= 180° - 20° - 55° = 105°$

**11.** 다음 그림에서 $5.0\text{pt}\overset{\frown}{AB} = 5.0\text{pt}\overset{\frown}{BC}$, $\angle ABD = 65°$, $\angle BDC = 40°$ 일 때, $\angle CAD$ 의 크기는?




① $25°$ ② $30°$ ③ $35°$ ④ $40°$ ⑤ $45°$

해설

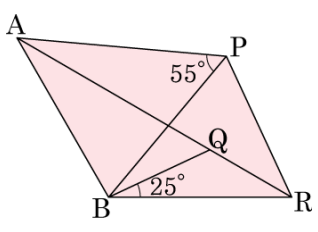
i ) $5.0\text{pt}\overset{\frown}{AB} = 5.0\text{pt}\overset{\frown}{BC}$ 이므로 $\angle ADB = 40°$

ii ) $5.0\text{pt}\overset{\frown}{AD}$ 에 대한 원주각이므로

$\angle ABD = \angle ACD = 65°$

$\therefore \angle CAD = 180° - (80° + 65°) = 35°$

**12.** 다음 그림에서 네 점 A, B, P, Q 는 한 원 위에 있다. $\angle APB = 55°$, $\angle RBQ = 25°$ 일 때, $\angle ARB$ 의 크기를 구하면?



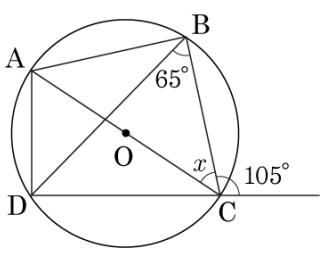

① $25°$ ② $30°$ ③ $35°$

④ $40°$ ⑤ $45°$

해설

네 점 A, B, P, Q 가 한 원 위에 있으므로
$\angle APB = \angle AQB = 55°$
$\triangle BQR$에서 $\angle ARB = 55° - 25° = 30°$

**13.** 다음 그림과 같은 내접사각형 ABCD 에 대하여 $\overline{AC}$ 는 원 O 의 지름일 때, $x$ 의 크기를 구하여라.



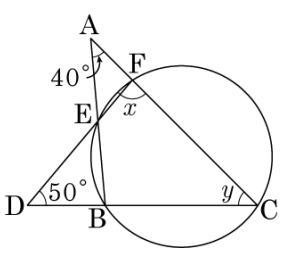

▶ 답 : _____ °

▷ 정답 : 50°

해설

$\angle ABC = 90°$ , $\angle BAD = 105°$ 이므로 $\angle ABD = 90° - 65° = 25°$
$\triangle BAD$ 에서 $\angle BDA = 180° - (105° + 25°) = 50°$
한편, 5.0pt$\overset{\frown}{AB}$ 에 대한 원주각 $\angle BDA = \angle x$ 이므로
$\angle x = 50°$ 이다.

**14.** 다음 그림에서 $\angle A = 40°$ , $\angle D = 50°$ 일 때, $\angle x$ 와 $\angle y$ 의 크기는?

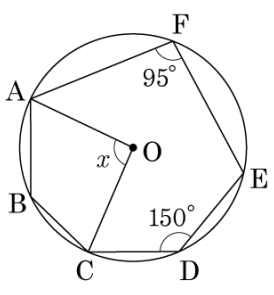



① $\angle x = 80°,\ \angle y = 40°$
② $\angle x = 85°,\ \angle y = 45°$
③ $\angle x = 85°,\ \angle y = 50°$
④ $\angle x = 90°,\ \angle y = 40°$
⑤ $\angle x = 90°,\ \angle y = 45°$

해설

$\angle AEF = \angle BED$ (맞꼭지각)$= \angle y$
$\angle DBE = \angle x$ 이므로
$\triangle AEF$ 에서 $\angle x = 40° + \angle y \cdots$ ㉠
$\triangle DBE$ 에서 $50° + \angle y + \angle x = 180° \cdots$ ㉡
따라서 ㉠, ㉡에서 $\angle y = 45°,\ \angle x = 85°$ 이다.

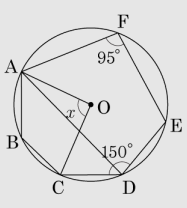
**15.** 다음 그림과 같이 원에 내접하는 오각형에서 $\angle D = 150°$, $\angle F = 95°$ , $\angle AOC = x°$ 일 때, $x$ 의 값은?




① 100° ② 110° ③ 120°

④ 130° ⑤ 140°

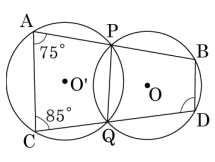
해설




보조선 $\overline{AD}$ 를 그어 내접하는 사각형 ADEF 에서 $\angle F = 95°$ 이므로 $\angle ADE = 180° - 95° = 85°$

$\angle ADC = 150° - 85° = 65°$ 이다. 따라서 $\angle AOC = x° = 2 \times \angle ADC = 130°$ 이다.

**16.** 다음 그림에서 두 원 O, O′ 이 두 점 P, Q 에서 만날 때, ∠BDQ 의 크기를 구하여라.




▶ 답 : ____°

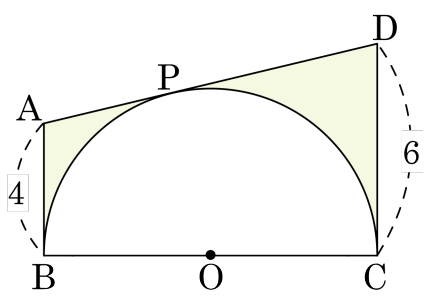
▷ 정답 : 95°

해설

∠BPQ = ∠ACQ = 85°

∴ ∠BDQ = 180° − 85° = 95°

**17.** 다음 그림에서 $\overline{BC}$ 는 원 O 의 지름이고 $\overline{AB}$ , $\overline{CD}$ , $\overline{AD}$ 는 모두 원 O 의 접선일 때, 색칠한 부분의 둘레는?



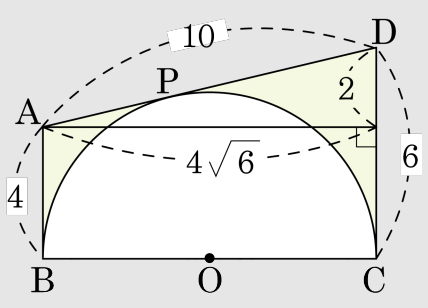

① 20 ② $10+21\pi$ ③ $12+2\sqrt{3}\pi$

④ $20+2\sqrt{6}\pi$ ⑤ $20+5\pi$

해설

$\overline{AB}=\overline{AP}, \overline{DP}=\overline{DC}$

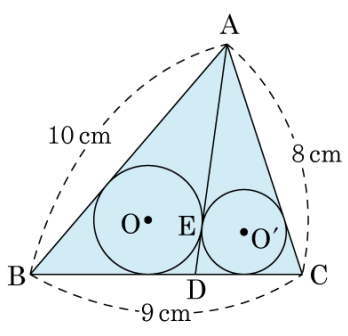
$\overline{AD}=\overline{AP}+\overline{DP}=10$




반원의 둘레는 $\frac{1}{2}\times\pi\times 4\sqrt{6}=2\sqrt{6}\pi$

따라서, 색칠한 부분의 둘레는 $2\overline{AD}+5.0\text{pt}\overset{\frown}{BC}=20+2\sqrt{6}\pi$

**18.** 그림과 같이 $\overline{AB} = 10\,\text{cm}, \overline{BC} = 9\,\text{cm}, \overline{AC} = 8\,\text{cm}$ 인 $\triangle ABD$, $\triangle ADC$ 의 내접원을 그리면 이 두 원이 한 점 E 에서 접할 때, $\overline{AE} - \overline{ED}$ 의 길이는?




① 2 cm ② 2.3 cm

③ 3.8 cm ④ 4 cm

⑤ 4.5 cm

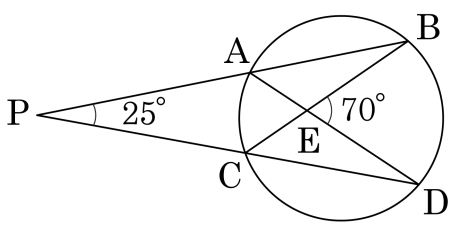
해설

$10 - \overline{AE} + 8 - \overline{AE} + 2\overline{ED} = 9$

$18 - 2\overline{AE} + 2\overline{ED} = 9$

$\therefore \overline{AE} - \overline{ED} = \dfrac{9}{2} = 4.5(\,\text{cm})$

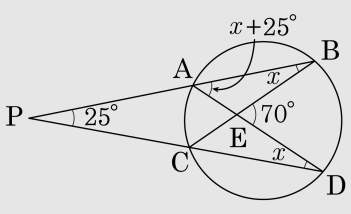
**19.** 다음 그림에서 $\angle P = 25°$ , $\angle BED = 70°$ 일 때, $\angle ABC$ 의 크기를 구하여라.




▶ 답 : _____ °

▷ 정답 : 22.5°

해설



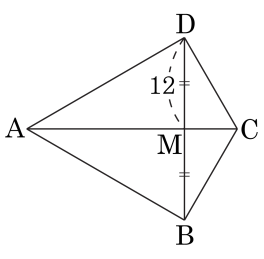

△AEB 에서

$\angle ABC = x$ 라면

$25° + x + x = 70°$

$2x = 45°$ $\therefore x = 22.5°$

**20.** 다음 그림에서 □ABCD는 원에 내접하고 $\overline{DM} = \overline{BM}$, $\overline{AM} : \overline{CM} = 3 : 1$, $\overline{DM} = 12$ 일 때, □ABCD의 외접원의 반지름의 길이는?

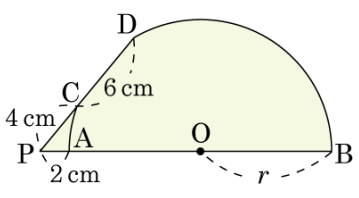



① $2\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $6\sqrt{3}$
④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

해설

$\overline{BD} \perp \overline{AC}$ 이므로
$\overline{AC}$는 지름이고
$\overline{AM} : \overline{CM} = 3 : 1$ 이므로
$\overline{AM} = 3k, \overline{CM} = k$ 라 하면
$12 \times 12 = 3k \times k,\ 144 = 3k^2$
$k^2 = 48, k = 4\sqrt{3} (\because k > 0)$ ,
$\overline{AM} = 12\sqrt{3}, \overline{CM} = 4\sqrt{3}$
$\therefore$ (반지름의 길이)$= \dfrac{\overline{AC}}{2} = \dfrac{\overline{AM} + \overline{CM}}{2} = \dfrac{16\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

**21.** 다음은 $\overline{AB}$ 를 지름으로 하는 반원 O 를 현 CD 를 따라 자른 도형이다. 반원 O 의 지름과 현의 연장선이 만나는 점을 P 라 할 때 반원의 지름을 구하면?

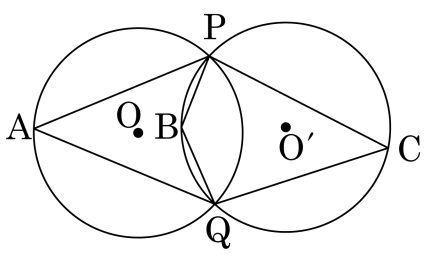



① 12 cm ② 14 cm ③ 16 cm ④ 18 cm ⑤ 20 cm

해설

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PD} \cdot \overline{PC}$
$2(2 + r + r) = 4(4 + 6)$
$r = 9$
따라서 반원의 지름은 18 cm 이다.

**22.** 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 두 원 O, O′ 가 두 점 P, Q 에서 만날 때, $\angle PAQ : \angle PBQ = 2 : 7$ 이다. $\angle PAQ$ 의 크기를 구하여라.




▶ 답 : ____°

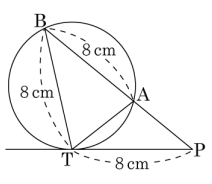
▷ 정답 : 40 °

해설

$\angle PAQ = \angle PCQ$ 이고
$\angle PBQ + \angle PCQ = 180°$ 이므로
$\angle PBQ + \angle PAQ = 180°$

$\therefore \angle PAQ = 180° \times \frac{2}{2+7} = 40°$

**23.** 다음 그림에서 직선 PT 는 원의 접선이고 $\overline{AB} = \overline{BT} = \overline{PT} = 8$ cm 일 때, $\overline{AT}$ 의 길이를 구하여라.



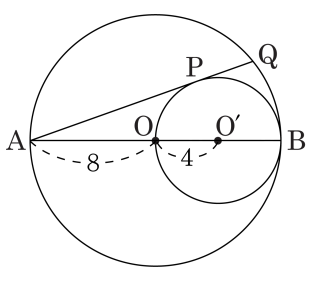

▶ 답 :

▷ 정답 : $-4+4\sqrt{5}$

해설

$\overline{PT}$ 는 원의 접선이므로 $\angle ATP = \angle ABT$
$\angle APT = \angle ABT$ 이므로
$\angle ATP = \angle APT$
따라서 $\triangle PAT$ 는 $\overline{AT} = \overline{AP}$ 인 이등변삼각형이다.
$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$ 이므로
$\overline{AT} = \overline{AP}$ 를 $x$ 라고 하면
$8^2 = x \times (x+8)$
$x^2 + 8x - 64 = 0$ $\therefore\ x = -4+4\sqrt{5}\ (\because\ x > 0)$

**24.** 다음 그림과 같이 점 A 에서 원 O′ 에 그은 접선 AP 와 원 O 와의 교점을 Q 라 할 때, $\overline{AQ}$ 의 길이는?

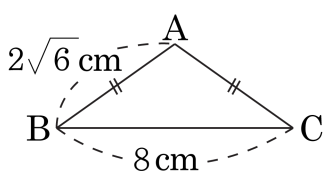



① $\frac{5}{3}\sqrt{2}$ ② $\frac{17}{3}\sqrt{2}$
③ $\frac{25}{3}\sqrt{2}$ ④ $\frac{32}{3}\sqrt{2}$
⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{2}$

해설

$\overline{AP} = \sqrt{12^2 - 4^2} = \sqrt{144 - 16} = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$
$\triangle AO'P \backsim \triangle ABQ$에서
$12 : 16 = 8\sqrt{2} : \overline{AQ}$
$12\overline{AQ} = 128\sqrt{2}$
$\therefore \overline{AQ} = \frac{32}{3}\sqrt{2}$

**25.** 다음 그림에서 $\overline{AB} = \overline{AC} = 2\sqrt{6}\text{cm}, \overline{BC} = 8\text{cm}$ 인 이등변삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 구하여라.

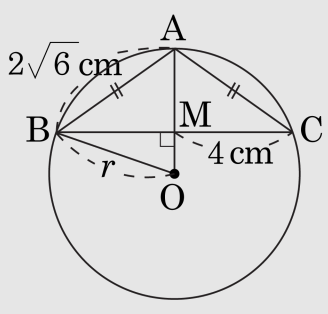



▶ 답: cm

▷ 정답: $3\sqrt{2}$ cm

해설

외접원의 반지름을 $r$ 이라 하자. 원의 중심 O 에서 현 CB 에 내린 수선의 발을 M 이라 하면 그 연장선은 점 A 와 만난다.




$\overline{MA}^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2 - 4^2 = 8$

$\therefore \overline{MA} = 2\sqrt{2}\,(\text{cm}),\ \overline{OM} = r - 2\sqrt{2}\,(\text{cm})$

$r^2 - 4^2 = \left(r - 2\sqrt{2}\right)^2,\ 4\sqrt{2}r = 24$

$\therefore r = 3\sqrt{2}\,(\text{cm})$

**26.** 원 O 의 외부의 한 점 P 에서 그 원에 그은 접선과 할선이 원과 만나는 점을 각각 T, A, B 라 할 때, 선분 BT 는 원의 지름이고 $\overline{PA} = 1$, $\overline{PT} = 3$ 일 때, 삼각형 PTB 의 넓이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $9\sqrt{2}$

해설

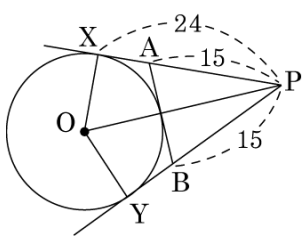
$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}, 9 = 1 \times \overline{PB} \quad \therefore \overline{PB} = 9$

피타고라스 정리에 의하여 원의 지름은

$\overline{BT} = \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{PT}^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

따라서 삼각형 PTB 의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3 = 9\sqrt{2}$

**27.** 다음 그림에서 $\overline{PX} = 24$, $\overline{PA} = 15$, $\overline{PB} = 15$ 일 때, 원의 반지름의 길이를 구하여라.

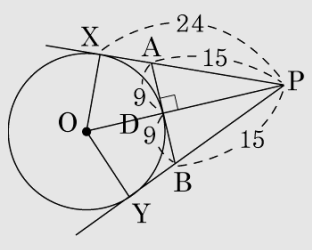



▶ 답:

▷ 정답: 18

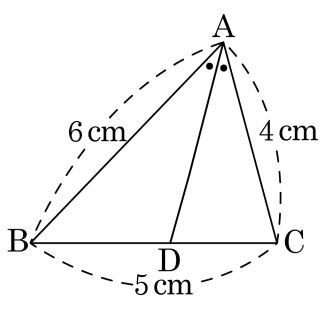
해설

△APB 의 둘레는 두 접선 $\overline{PX} + \overline{PY} = 48$ 이다.
$\therefore \overline{AB} = 48 - 30 = 18$
△PAB 는 이등변삼각형이고 $\overline{PD}$ 는 $\angle P$ 의 각의 이등분선으로 $\overline{AB}$ 를 수직이등분한다.




$\overline{PD} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$
또한, 원의 반지름을 $x$ 라고 하면
△XOP 도 직각삼각형이므로
$\overline{OP}^2 = \overline{OX}^2 + \overline{XP}^2$
$(x+12)^2 = x^2 + 24^2$
$\therefore\ x = 18$

**28.** 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 6\text{cm}$, $\overline{BC} = 5\text{cm}$, $\overline{CA} = 4\text{cm}$ 인 $\triangle ABC$ 에 대하여 $\angle A$ 의 이등분선이 $\overline{BC}$와 만나는 점을 D라고 할 때, $\overline{AD}$의 길이를 구하여라.




▶ 답 : cm

▷ 정답 : $3\sqrt{2}$cm

해설

다음 그림과 같이 $\triangle ABC$ 의 내접원 I 를 그리고 접점을 각각 E, F, G 라 한다.

$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 6 : 4 = 3 : 2 \therefore \overline{BD} = 3\,\text{cm}$, $\overline{DC} = 2\,\text{cm}$

$\angle B$ 의 이등분선과 $\overline{AD}$ 의 교점을 I 라고 하면

$\overline{AI} : \overline{ID} = \overline{AB} : \overline{BD} = 2 : 1 \cdots ①$

한편, 점 I 는 $\triangle ABC$ 의 내접원의 중심이므로 $\overline{IE} = r$ , $\overline{AE} = x$ 라 하면 $\overline{AF} = \overline{AE} = x$, $\overline{CG} = \overline{CE} = 4 - x$, $\overline{BG} = \overline{BF} = 6 - x$

$\overline{BC} = (6 - x) + (4 - x) = 5$

$\therefore x = \dfrac{5}{2}$

헤론의 공식에 의해

$s = \dfrac{6+5+4}{2} = \dfrac{15}{2}$ 이므로

$\triangle ABC = \sqrt{s(s-6)(s-5)(s-4)}$

$= \sqrt{\dfrac{15}{2} \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{5}{2} \times \dfrac{7}{2}}$

$= \dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

내접원 I 의 반지름이 $r$ 이므로

$\dfrac{r}{2}(4+5+6) = \dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

$\therefore\ r = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

직각삼각형 AIE 에서

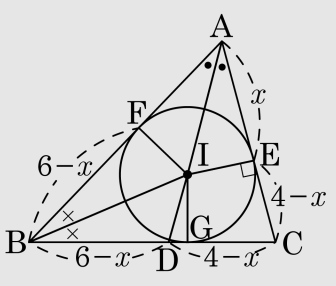
$\overline{AI}^2 = \left(\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = 8$

$\therefore \overline{AI} = 2\sqrt{2} (\because \overline{AI} > 0)$

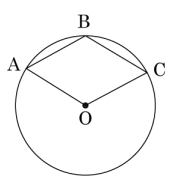
①에서 $\overline{AI} : \overline{ID} = 2 : 1$ 이므로

$\overline{ID} = \sqrt{2}$

$\therefore \overline{AD} = \overline{AI} + \overline{ID} = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}(\text{cm})$



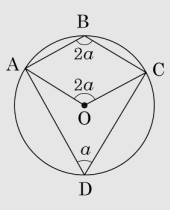
**29.** 다음 그림과 같은 원 O 에서 사각형 OABC 가 평행사변형이 될 때, ∠OAB 의 크기를 구하여라.




▶ 답 : _____ °

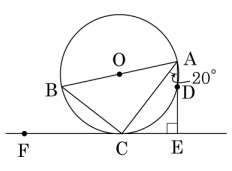
▷ 정답 : 60 °

해설




∠AOC = $2a$ 라 두면 사각형 ABCO 가 평행사변형이므로
∠ABC = $2a$
다음 그림과 같이 원 위의 한 점 D 를 잡으면
∠ADC = $a$
사각형 ABCD 는 원에 내접하므로
$2a + a = 180°$ ∴ $\angle a = 60°$
사각형 ABCO 가 평행사변형이므로
∠OAB + ∠AOC = 180°
∠OAB + $2\angle a = 180°$
∴ ∠OAB = $180° - 2\angle a = 180° - 120° = 60°$

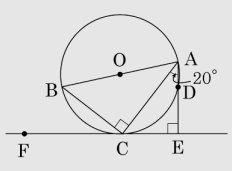
**30.** 다음 그림에서 직선 EF 는 원 O 의 접선이고 $\angle AEC = 90°$, $\angle CAE = 20°$ 일 때, $\angle BCF$ 의 크기를 구하여라.




▶ 답 : _____ °

▷ 정답 : 20 °

해설




$\triangle ACE$ 에서 $\angle ACE = 90° - 20° = 70°$
접선과 현이 만나서 이루는 각은 그 각의 내부에 있는 호의 원주각의 크기와 같으므로
$\angle ABC = \angle ACE = 70°$
지름에 대한 원주각은 $90°$ 이므로 $\angle ACB = 90°$
$\angle BAC = 180° - (90° + 70°) = 20°$
접선과 현이 만나서 이루는 각은 그 각의 내부에 있는 호의 원주각의 크기와 같으므로
$\angle BCF = \angle BAC = 20°$