1. 다음 무리식의 값이 실수가 되는 실수 x 의 값의 범위는?

$$\sqrt{3x^2 + 13x + 4}$$

① $x \le -4$ 또는 $x \ge -\frac{1}{3}$
② $x \le -\frac{1}{3}$ 또는 $x \ge 4$
③ $x \le \frac{1}{3}$ 또는 $x \ge 4$
④ $-4 \le x \le \frac{1}{3}$
⑤ $-\frac{1}{3} \le x \le 4$

해설

$3x^2 + 13x + 4 \ge 0$

$(3x+1)(x+4) \ge 0$

$\therefore\ x \le -4$ 또는 $x \ge -\frac{1}{3}$

2. $a < 0,\ b < 0$일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$

② $\dfrac{\sqrt{b}}{a} = \sqrt{\dfrac{b}{a^2}}$

③ $\sqrt{a^2 b^2} = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

해설

① $\sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\dfrac{b}{a^2}} = \dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}} = \dfrac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2}\sqrt{b^2} = (-a)(-b) = ab$

④ $\sqrt{-ab} = \sqrt{-a}\sqrt{b} = \sqrt{(-1)a}\ \sqrt{b}$

$= -\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab} = -\sqrt{a}\sqrt{b}$

3. 무리함수 $y = \sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를 평행이동 $f : (x,\ y) \to (x+a,\ y+b)$ 에 의해 옮긴 그래프의 식이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a+b+c$ 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y = \sqrt{2x+1}+2$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로
b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2(x-a)+1}+2+b \\ &= \sqrt{2x-2a+1}+2+b \end{aligned}$$

이 식이 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 와 같으므로
$a = 2,\ -2a+1 = b,\ 2+b = c$
따라서, $a = 2,\ b = -3,\ c = -1$ 이므로
$\therefore\ a+b+c = -2$

4. $0 < x \le 1$일 때, 무리식 $\sqrt{1+\frac{2x+1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{2x-1}{x^2}}$을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$\sqrt{1+\frac{2x+1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{2x-1}{x^2}}$

$=\sqrt{\frac{(x+1)^2}{x^2}}-\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2}}$

$=\frac{x+1}{x}+\frac{x-1}{x}=\frac{2x}{x}=2$

5. $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$을 계산하면?

① $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$
② $4-\sqrt{2}-\sqrt{3}$
③ $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-5$
④ $\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3})$
⑤ $\dfrac{1}{3}(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})$

해설

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}$$
$$=\frac{2\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}$$
$$=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

6. $\sqrt{10+\sqrt{96}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a+b+\dfrac{2}{a+b}$의 값을 구하면?

① $2\sqrt{6}$　　② $\sqrt{6}$　　③ $2-\sqrt{6}$
④ $3+\sqrt{6}$　　⑤ $3+\sqrt{3}$

해설

$\sqrt{10+\sqrt{96}}=\sqrt{10+2\sqrt{24}}=\sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{4})^2}$

$=\sqrt{6}+2,\ 2+\sqrt{6}=4.\times\times\times$

$\therefore$ 정수 부분 a : 4 소수 부분 b : $=\sqrt{6}-2$

$\Rightarrow a+b+\dfrac{2}{a+b}=2+\sqrt{6}+\dfrac{2}{2+\sqrt{6}}$

$=\sqrt{6}+2+\dfrac{2(\sqrt{6}-2)}{(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)}$

$=2\sqrt{6}$

7. $x = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$, $y = \dfrac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$ 일 때, $(x+y)^2 - (x-y)^2$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{3}$

④ $-2\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$x + y = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$

$= \sqrt{5}$

$x - y = \dfrac{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

$= \sqrt{2} - \sqrt{3}$

$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 5 - (5 - 2\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$

8. 함수 $y=-\sqrt{a-x}+b$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \le 4 \}$이고, 그래프가 점 $(-5,\ 2)$를 지날 때, 이 함수의 치역은?

① $\{ y \mid y \ge 1 \}$ ② $\{ y \mid y \le 3 \}$ ③ $\{ y \mid y \ge 3 \}$
④ $\{ y \mid y \le 5 \}$ ⑤ $\{ y \mid y \ge 5 \}$

해설

$a-x \ge 0$ 에서 $x \le a$
$\therefore\ a=4$
$y=-\sqrt{4-x}+b$ 의 그래프가 점 $(-5,\ 2)$ 를 지나므로 $2=-\sqrt{4-(-5)}+b$
$\therefore\ b=5$
따라서 주어진 함수의 치역은 $\{ y \mid y \le 5 \}$

9. 함수 $y = \frac{2x-7}{x-1}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = a$, $y = b$ 이고, 함수 $f(x) = \sqrt{ax+b} + c$ 에 대하여 $f(2) = -1$ 일 때, 함수 $f(x)$ 의 정의역과 치역을 차례로 구하면?

① $\{ x \mid x \le -3 \}$, $\{ y \mid y \ge 1 \}$

② $\{ x \mid x \ge -2 \}$, $\{ y \mid y \ge -3 \}$

③ $\left\{ x \mid x \ge \frac{1}{2} \right\}$, $\{ y \mid y \le -2 \}$

④ $\{ x \mid x \le 1 \}$, $\{ y \mid y \ge -1 \}$

⑤ $\{ x \mid x \ge 2 \}$, $\{ y \mid y \ge 3 \}$

해설

$y = \frac{2x-7}{x-1} = -\frac{5}{x-1} + 2$ 이므로 점근선의 방정식은 $x = 1$, $y = 2$

$\therefore\ a = 1,\ b = 2$

$f(x) = \sqrt{x+2} + c$ 에서 $f(2) = -1$ 이므로

$-1 = 2 + c \quad \therefore\ c = -3$

즉, $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$ 이므로

정의역은 $\{ x \mid x \ge -2 \}$, 치역은 $\{ y \mid y \ge -3 \}$ 이다.

10. 다음 중 함수 $y = a\sqrt{bx}$ 의 그래프가 그려지는 사분면을 옳게 나타낸 것을 고르면? (단, $ab \neq 0$)

① $ab > 0$ 이면 제 3사분면

② $ab < 0$ 이면 제 4사분면

③ $a < 0, b > 0$ 이면 제 4사분면

④ $a > 0, b < 0$ 이면 제 1사분면

⑤ $a < 0, b < 0$ 이면 제 2사분면

해설

㉠ $ab > 0 \Leftrightarrow (a > b$ 이고 $b > 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b < 0)$ 이므로 제 1사분면 또는 제 3사분면에 그래프가 그려진다.
㉡ $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0$ 이고 $b < 0)$ 또는 $(a < 0$ 이고 $b > 0)$ 이므로 제 2사분면 또는 제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉢ $a < 0, b > 0$ 이면
제 4사분면에 그래프가 그려진다.
㉣ $a > 0, b < 0$ 이면
제 2사분면에 그래프가 그려진다.
㉤ $a < 0, b < 0$ 이면
제 3사분면에 그래프가 그려진다.

11. 함수 $y = -\sqrt{x+1}+3$의 그래프에 대한 설명 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① 정의역은 $\{x \mid x \geq -1\}$이다.

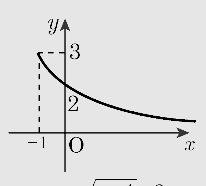
② 치역은 $\{y \mid y \geq 3\}$이다.

③ 그래프는 점 $(-1,\ 3)$ 을 지난다.

④ 그래프는 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.

⑤ 그래프는 제 2사분면을 지난다.

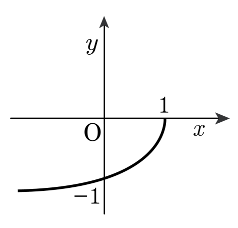
해설



$y = -\sqrt{x+1}+3$

② 치역은 $\{y \mid y \leq 3\}$이다.
④ 그래프는 $y = -\sqrt{x}$ 의 그래프를 평행이동한 것이다.
⑤ 그래프는 제 1 , 2 , 4 사분면을 지난다.
따라서 옳지 않은 것은 ②, ④이다.

12. $y=-\sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프의 개형이 아래 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y=-\sqrt{ax+b}+c=-\sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$

점 $(1,0)$ 에서 시작이므로 $-\frac{b}{a}=1,\ c=0$

$\therefore b=-a,\ c=0$

이것을 주어진 식에 대입하면 $y=-\sqrt{ax-a}$ 이고

주어진 그래프가 점 $(0,-1)$ 를 지나므로

$-1=-\sqrt{-a}$

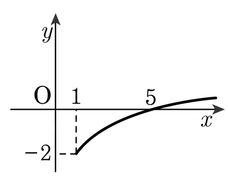
양변을 제곱을 하면 $1=-a$

$\therefore\ a=-1$

따라서 $a=-1,\ b=1,\ c=0$ 이므로

$a+b+c=-1+1+0=0$

13. 다음 그림은 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 그린 것이다. 이 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$ 의 값은?



① 1　　② −1　　③ 2

④ −2　　⑤ 3

해설

$y = \sqrt{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}+c$의 그래프를 보면

점$(1, -2)$에서부터 시작하므로

$-\frac{b}{a} = 1,\ c = -2$

$\therefore -b = a\ ,\ c = -2$

$y = \sqrt{ax-a}-2$가 점$(5, 0)$을 지나므로

$0 = \sqrt{5a-a}-2,\ 2 = \sqrt{4a}$

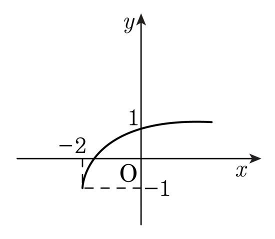
양변을 제곱하면 $4 = 4a$

$\therefore\ a = 1$

따라서 $a = 1, b = -1, c = -2$이므로

$a+b+c = 1-1-2 = -2$

14. 함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x 축의 교점의 좌표는? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수)

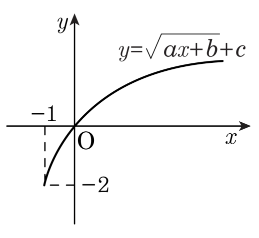


① $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$　② $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$　③ $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$　④ $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$　⑤ $\left(-\sqrt{3}, 0\right)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프는
함수 $y = a\sqrt{x}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 $-b$ 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼
평행이동 시킨 것이므로 $b = 2,\ c = -1$
$\therefore y = a\sqrt{x+b}+c = a\sqrt{x+2}-1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$ 을 지나므로
$1 = a\sqrt{0+2}-1 \quad \therefore a = \sqrt{2}$
따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$ 의 그래프와
x 축의 교점의 x 좌표를 구하면
$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$
$\Rightarrow \sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow x+2 = \frac{1}{2}$
$\therefore x = -\frac{3}{2}$

15. 함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 그래프에서 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의
그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼
평행이동한 것이므로
$y = \sqrt{ax+b}+c$
$\Leftrightarrow \quad y = \sqrt{a(x+1)}-2$
이것이 원점을 지나므로 $0 = \sqrt{a(0+1)}-2$
$\therefore \sqrt{a} = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 4$
$y = \sqrt{4x+4}-2$
$\therefore a+b+c = 4+4-2 = 6$

16. 두 함수 $y=\sqrt{x+3}$과 $y=x+k$의 그래프가 서로 다른 두 개의 교점을 갖도록 상수 k의 값의 범위를 구하면?

① $1 \le k < \frac{13}{4}$　　② $2 \le k < \frac{13}{4}$　　③ $3 \le k \le \frac{13}{4}$

④ $3 < k < \frac{13}{4}$　　⑤ $3 \le k < \frac{13}{4}$

해설

직선과 포물선이 접하려면 $\sqrt{x+3}=x+k$

$\therefore\ x+3=(x+k)^2$

$x^2+(2k-1)x+(k^2-3)=0$ 에서

$D=(2k-1)^2-4(k^2-3)=0$

$4k^2-4k+1-4k^2+12=0$

$\therefore\ -4k+13=0$

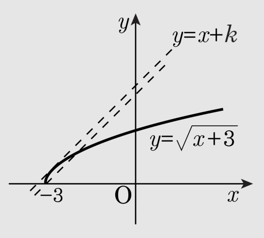
$\therefore\ k=\frac{13}{4}$

또, 직선 $y=x+k$가 점 $(-3,\ 0)$을 지날 때

$0=-3+k \quad \therefore\ k=3$

따라서 서로 다른 두 개의 교점을 가질 때의 k 의 값의 범위는

$3 \le k < \frac{13}{4}$



17. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, $g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여

$(f \circ g)(a) = \dfrac{1}{2}$ 일 때, $(g \circ f)(4a)$ 의 값은? (단, $(a > 0)$)

① $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ ③ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

해설

$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(\sqrt{a}) = \dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$ 이므로

$\dfrac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \dfrac{1}{2}$, $2\sqrt{a} = 1 + \sqrt{a}$

$\sqrt{a} = 1 \quad \therefore a = 1$

$$\therefore (g \circ f)(4a) = (g \circ f)(4) = g(f(4)) = g\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

18. 정의역이 $\{x \mid x > -1\}$ 인 두 함수 $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{3x+4} - 2$ 에 대하여 $(g \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ g)(4)$ 의 값을 구하면?

① -1 ② $-\dfrac{3}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{4}$

해설

$(g \circ (f^{-1} \circ g)^{-1} \circ g)(4)$
$= (g \circ (g^{-1} \circ f) \circ g)(4)$
$= ((g \circ g^{-1}) \circ f \circ g)(4)$
$= (f \circ g)(4)$

이때, $g(4) = \sqrt{3 \cdot 4 + 4} - 2 = 2$ 이므로

구하는 값은 $f(g(4)) = f(2) = \dfrac{1}{3}$ 이다.

19. $x \geq -1$ 인 실수 x에 대하여 $f(x) = \sqrt{x+1}$로 정의된 함수 f의 역함수를 f^{-1}이라고 할 때 모든 양수 t에 대하여 $\dfrac{f^{-1}(t)}{(t+1)^2}$를 옳게 나타낸 것은?

① $\dfrac{1}{t+1}$　② $\dfrac{t}{t+1}$　③ $\dfrac{2t-2}{t+1}$
④ $\dfrac{t-1}{t+1}$　⑤ $\dfrac{2t}{t-1}$

해설

$f(x) = \sqrt{x+1}$ $(x \geq -1)$ 에서
역함수 $f^{-1}(x)$를 구하여 $f^{-1}(t)$로 나타내면
$y = \sqrt{x+1} \rightarrow y^2 = x+1 \rightarrow x = y^2 - 1$
$\therefore\ f^{-1}(x) = x^2 - 1$ $(x \geq 0)$
$\therefore\ f^{-1}(t) = t^2 - 1$
$\therefore\ \dfrac{f^{-1}(t)}{(t+1)^2} = \dfrac{t^2-1}{(t+1)^2} = \dfrac{t-1}{t+1}$

20. $y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ π ④ 2π ⑤ 4π

해설

$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 에서

$1-(x+1)^2 \geq 0,\ x^2+2x \leq 0$

$\therefore -2 \leq x \leq 0$

따라서 주어진 함수의 정의역은

$\{x| -2 \leq x \leq 0\}$, 치역은 $\{y|y \geq 0\}$

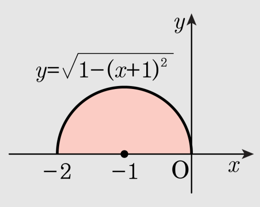
$y = \sqrt{1-(x+1)^2}$ 의 양변을

제곱하여 정리하면 $(x+1)^2+y^2=1$ 이므로

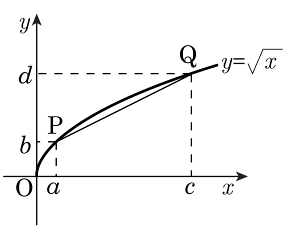
함수의 그래프는 다음 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$



21. 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ b), \mathrm{Q}(c,\ d)$ 에 대하여 $\dfrac{b+d}{2} = 1$ 일 때, 직선 PQ 의 기울기를 구하면? (단, $0 < a < c$)



① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{1}{3}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

두 점 $\mathrm{P}(a,\ b),\ \mathrm{Q}(c,\ d)$ 는
함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프 위의 점이므로
$b = \sqrt{a},\ d = \sqrt{c}$
$\therefore\ a = b^2,\ c = d^2$
따라서 직선 PQ 의 기울기는
$\dfrac{d-b}{c-a} = \dfrac{d-b}{d^2-b^2} = \dfrac{d-b}{(d-b)(d+b)} = \dfrac{1}{d+b}$ 이고
$\dfrac{b+d}{2} = 1$ 에서 $b+d = 2$ 이므로
$(\therefore$ 직선 PQ의 기울기$) = \dfrac{1}{2}$

22. 실수 x를 넘지 않는 최대의 정수를 $[x]$라고 하고 $\{x\} = x - [x]$로 정의하자 $x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$일 때, $\left[\left\{\{x\}^{-1}\right\}^{-1}\right]$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \sqrt{28 - 2\sqrt{25 \times 3}} = 5 - \sqrt{3}$

$[5 - \sqrt{3}] = [3.2\cdots\cdots] = 3$

$\{x\} = (5 - \sqrt{3}) - 3 = 2 - \sqrt{3}$,

$\{x\}^{-1} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

$\left\{2 + \sqrt{3}\right\} = 2 + \sqrt{3} - [2 + \sqrt{3}] = \sqrt{3} - 1$

$\left\{2 + \sqrt{3}\right\}^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1.3\cdots\cdots$

따라서, $\left\{\{x\}^{-1}\right\}^{-1} = 1$

23. $x = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$일 때, $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4x + 1$의 값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 7

해설

$x = \sqrt{2}+1,\ (x-1)^2 = (\sqrt{2})^2$에서

$x^2 - 2x - 1 = 0$

(준식) $= (x^2-2x-1)(x^2+2)+3$

$= 0 \times (x^2+2)+3 = 3$

24. 함수 $y=\dfrac{ax+8}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=6$, $y=-1$ 일 때, 함수 $y=\sqrt{bx-a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$y=\dfrac{ax+8}{x+b}=\dfrac{8-ab}{x+b}+a$ 이고

점근선의 방정식이 $x=-b=6$, $y=a=-1$ 이므로 $a=-1$, $b=-6$

함수 $y=\sqrt{-6x+1}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \le \dfrac{1}{6}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최댓값은 0 이다.

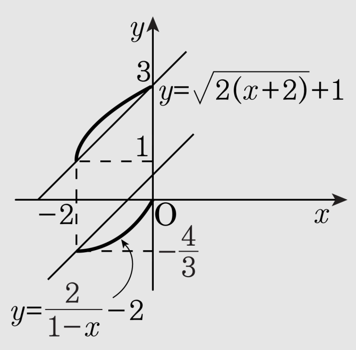
25. 정의역이 $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$, $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 에 대하여 $y = x+r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$-2 \leq x \leq 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 과 $y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x+r$ 의 그래프가

$y = \sqrt{2(x+2)}+1$ 의 그래프보다

아래에 있으므로 $r < 3$

또한, $y = x+r$ 의 그래프가

$y = \dfrac{2}{1-x}-2$ 의 그래프보다

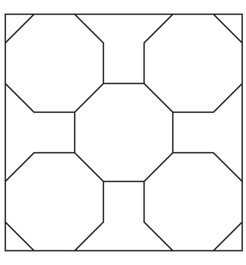
위에 있으므로 $r > \dfrac{2}{3}$

$\therefore \dfrac{2}{3} < r < 3$

따라서 $r_1 = \dfrac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로

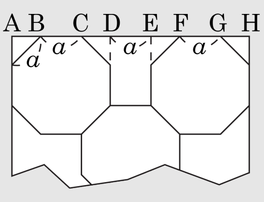
$\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \dfrac{2}{3} - 3 = -1$

26. 한 변의 길이가 2인 정사각형의 내부에 그림과 같이 합동인 5개의 정팔각형이 위치할 때, 한 개의 정팔각형의 넓이는?



① $2(5\sqrt{2}-7)$　② $4(5\sqrt{2}-7)$
③ $6(5\sqrt{2}-7)$　④ $8(5\sqrt{2}-7)$
⑤ $10(5\sqrt{2}-7)$

해설



정팔각형의 한 변의 길이를 a 라 하면
그림에서 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{FG}}=a$
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{GH}}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

$\therefore \overline{\mathrm{AH}}=3a+4\times\dfrac{a}{\sqrt{2}}$
$\quad=(3+2\sqrt{2})a$

그런데 문제의 조건에서 $\overline{\mathrm{AH}}=2$ 이므로
$(3+2\sqrt{2})a=2$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{3+2\sqrt{2}}=2(3-2\sqrt{2})$

따라서 한 개의 정팔각형의 넓이는 한 변의 길이가 $\overline{\mathrm{AD}}$ 인 정사각형의 넓이에서
네 귀퉁이의 직각이등변삼각형의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$\left(a+2\cdot\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2=(2+2\sqrt{2})a^2$$

$$\therefore (2+2\sqrt{2})a^2=(2+2\sqrt{2})\left\{2(3-2\sqrt{2})\right\}^2$$
$$=8(5\sqrt{2}-7)$$

27. $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4-\sqrt{15}})^x = 8$을 만족하는 x의 값을 a, b라 할 때, ab의 값을 구하면?

① 4　　② -4　　③ 8　　④ -8　　⑤ 12

해설

$\sqrt{4+\sqrt{15}} = \dfrac{1}{\sqrt{4-\sqrt{15}}}$ 이므로 $\sqrt{4+\sqrt{15}} = k$라 하면

$k^x + \left(\dfrac{1}{k}\right)^x = 8 \quad \therefore \ (k^x)^2 - 8k^x + 1 = 0$

$\therefore \ k^x = 4 \pm \sqrt{15}$

i) $k^x = 4 + \sqrt{15}$일 때, $x = 2$

ii) $k^x = 4 - \sqrt{15}$일 때, $x = -2$

$\therefore \ ab = -4$

28. $f(x) = \sqrt{x-1}+1$과 그 역함수를 $g(x)$라 할 때 $g(x)$와 $f(x), g(x)$의 교점 사이의 거리를 각각 옳게 구한 것은?

① $g(x) = x^2-2x+2,\ \sqrt{3}$
② $g(x) = x^2-2x+2,\ \sqrt{2}$
③ $g(x) = x^2-2x+1,\ \sqrt{2}$
④ $g(x) = x^2-2x+1,\ \sqrt{3}$
⑤ $g(x) = x^2-2x+1,\ \sqrt{5}$

해설

$f(x) = \sqrt{x-1}+1$ 에 대하여
i) $y = \sqrt{x-1}+1$로 놓고 역함수를 구하면
$y-1 = \sqrt{x-1}$ ······ ㉠
㉠을 제곱하면
$(y-1)^2 = x-1,\ y^2-2y+1 = x-1,\ x = y^2-2y+2$
$\therefore\ g(x) = x^2-2x+2$
ii) $f(x)$와 역함수 $g(x)$의 교점은
$f(x)$와 $y=x$ 또는 $g(x)$ 와 $y=x$의 교점을
구하면 된다.
$g(x) = x$에서 $x^2-2x+2 = x$
$x^2-3x+2 = 0$, $(x-2)(x-1) = 0$
그러므로 $x = 2\ or\ x = 1$에서 $y = 2\ or\ y = 1$
따라서 두 점$(1,\ 1), (2,\ 2)$사이의 거리는
$\sqrt{(2-1)^2+(2-1)^2} = \sqrt{2}$