1. $\dfrac{{}_{n}P_3}{{}_{n+2}P_3} = \dfrac{5}{12}$ 일 때 n 값을 구하면?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$\dfrac{{}_{n}P_3}{{}_{n+2}P_3} = \dfrac{\dfrac{n!}{(n-3)!}}{\dfrac{(n+2)!}{(n+2-3)!}}$

$= \dfrac{(n-2)(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{5}{12}$

$\dfrac{(n-2)(n-1)}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{5}{12}$ 을 풀면

$7n^2 - 51n + 14 = 0$

$(7n-2)(n-7) = 0$

$\therefore n = \dfrac{2}{7}$ 또는 $n = 7$

${}_{n}P_3$ 에서 n은 3 이상의 자연수이므로

$\therefore n = 7$

2. 남학생 4 명, 여학생 3 명이 한 줄로 서서 등산을 할 때, 특정인 2 명이 이웃하여 서는 방법은 몇 가지인가?

① $7!$ ② $7! \times 2!$ ③ $6! \times 2!$
④ $6!$ ⑤ $5! \times 2!$

해설

특정인 2 명을 한 묶음으로 생각하여 6 명을 일렬로 세우는 방법의 수가 $6!$,
묶음 안에서 2 명이 자리를 바꾸는 방법의 수가 $2!$이므로, 구하는 경우의 수는 $6! \times 2!$ (가지)

3. 「모든 중학생은 고등학교에 진학한다」의 부정인 명제는?

① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.

② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.

③ 중학생이 아니면 고등학교에 진학하지 않는다.

④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 'p 이면 q 이다' 가 'p 이면 q 가 아니다' 이고, '모든' 의 부정은 '어떤' 이므로 '모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)' 의 부정은 '어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다' 이다.

4. *various* 의 7 개의 문자를 일렬로 나열할 때, 양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는?

① 120 ② 360 ③ 600 ④ 720 ⑤ 1080

해설

자음 3 개중 2 개를 뽑아 일렬로 나열하는 수 : ${}_3P_2$
나머지 5 개 문자를 배열하는 수 : 5!
${}_3P_2 \times 5! = 720$

5. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ \{3,\ 4\},\ \{5,\ 6,\ 7\}\}$, $B = \{0,\ \varnothing,\ \{\varnothing\}\}$ 에 대하여 $n(A) - n(B)$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

집합 안에 집합이 포함되어 있을 경우 포함된 집합을 하나의 원소로 여기어 원소의 개수를 센다.
따라서 $n(A) = 4$, $n(B) = 3$ 이고, $n(A) - n(B) = 1$ 이다.

6. 어느 대학의 입학시험에서 영문과와 수학과의 지원자 수의 비는 $3:4$이고, 합격자의 수의 비는 $5:6$, 불합격자의 수의 비는 $5:8$이다. 이 대학의 수학과의 경쟁률을 구하면?

① $10:3$　② $5:3$　③ $4:1$　④ $5:2$　⑤ $4:3$

해설

영문과 합격자 수를 5α라 하면,
수학과 합격자 수는 6α
영문과 불합격자 수를 5β라 하면,
수학과 합격자 수는 8β
$\therefore\ (5\alpha+5\beta):(6\alpha+8\beta)=3:4$
$\Rightarrow\ 18\alpha+24\beta=20\alpha+20\beta$
$\therefore\ \alpha=2\beta$

$$\therefore \text{수학과 경쟁률} = \frac{\text{지원자 수}}{\text{합격자 수}} = \frac{6\alpha+8\beta}{6\alpha} = \frac{10\alpha}{6\alpha} = \frac{5}{3}$$

$\Rightarrow\ 5:3$

7. 2002년 월드컵은 32개팀이 참가하여 4개팀 8조로 나누어 리그전을 치룬 후 16강을 결정했다. 16강은 토너먼트 방식으로 우승팀을 가렸고, 별도로 3, 4위전이 있었다. 2002년 월드컵에서 치른 총 게임 수를 구하여라.

① 44 ② 58 ③ 64 ④ 72 ⑤ 76

해설

각 조별 리그전 : ${}_4C_2 = 6$
16강 토너먼트 : $16 - 1 = 15$
3, 4위전 : 1
$\therefore\ {}_4C_2 \times 8 + (16 - 1) + 1 = 64$

8. 집합 $S = \{2, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 집합 $A = \{xy | x \in S, y \in S\}$ 이다. 집합 A 의 부분집합 중 임의의 원소의 약수의 개수가 3 개인 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 16 개

해설

자연수 N 의 약수의 개수가 3 개이면 N 은 소수의 제곱수이다.
$S = \{2, 3, 5, 7\}$, $A = \{xy | x \in S, y \in S\}$ 이고 S 의 원소는 모두 소수이므로,
임의의 원소의 약수의 개수가 3 개인 부분집합은 $\{2^2, 3^2, 5^2, 7^2\} = \{4, 9, 25, 49\}$ 의 부분집합이다.
따라서 $2^4 = 16$ (개)

9. $xy < 0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2 + y^2 \geq axy$가 성립할 때, 실수 a의 최솟값을 구하면?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

주어진 부등식의 양변을 xy로 나누면

$xy < 0$이므로 $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq a$

즉 $\left(-\frac{x}{y}\right) + \left(-\frac{y}{x}\right) \geq -a$

$-\frac{x}{y} > 0$, $-\frac{y}{x} > 0$이므로

$\left(-\frac{x}{y}\right) + \left(-\frac{y}{x}\right) \geq 2\sqrt{\left(-\frac{x}{y}\right)\left(-\frac{y}{x}\right)} = 2$

$\therefore 2 \geq -a$

$\therefore a \geq -2$

따라서, a의 최솟값은 -2 이다.

10. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$가 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$에서 정의되어 있을 때, $f(x)$가 4로 나누어 떨어지지 않는 집합 X의 원소의 개수를 a개라 할 때, a의 값을 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4개

해설

$f(x)$가 4로 나누어 떨어지는 원소를 먼저 구해보면
$f(x) = x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$에서 $(x + 2)$가 2의 배수인 동시에 $(x - 1)$가 2의 배수인 x는 존재하지 않으므로 다음 두 가지 경우로 나누어 생각한다.
1) $(x + 2)$가 4의 배수일 경우 : $x = 2,\ 6,\ 10$
2) $(x - 1)$이 4의 배수일 경우 : $x = 1,\ 5,\ 9$
$\therefore\ x = 1,\ 2,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10$
따라서 $f(x)$가 4로 나누어 떨어지지 않는 원소는 3, 4, 7, 8의 4개이다.
$\therefore\ a = 4$