

1. 이차방정식 $|x^2 - 5| = 4x$ 의 모든 근의 합은?

① 5

② 0

③ 6

④ 10

⑤ 12

해설

i) $x^2 - 5 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\sqrt{5}$ 또는 $x \geq \sqrt{5} \dots \textcircled{\text{㉠}}$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x+1)(x-5) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } 5$$

$$\Rightarrow x = 5 (\because \textcircled{\text{㉠}})$$

ii) $x^2 - 5 < 0 \Rightarrow -\sqrt{5} < x < \sqrt{5} \dots \textcircled{\text{㉡}}$

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$(x-1)(x+5) = 0$$

$$x = 1 \text{ 또는 } -5$$

$$\Rightarrow x = 1 (\because \textcircled{\text{㉡}})$$

$$\therefore \text{근의 합} : 6$$

2. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$ 을 만족하는 양수 x 에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$ 의 값은?

① 4 ② 2 ③ -1 ④ 5 ⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x 를 구하면

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$x > 0 \text{ 이므로 } x = \frac{-1 + \sqrt{41}}{4}$$

$$4x - \sqrt{41} = -1, \quad 2x^2 + x = 5$$

$$(\text{준식}) = (-1)^2 + (2x^2 + x - 1) = 1 + (5 - 1) = 5$$

3. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - k(k+3)x + k^2 - 1 = 0$ 의 두 근 중 단 하나만이 양이 되기 위한 실수 k 의 조건은?

- ① $-1 < k \leq 1$ ② $-1 < k < 1$ ③ $0 < k \leq 2$
④ $-1 \leq k \leq 0$ ⑤ $-1 \leq k \leq 1$

해설

이차방정식의 두 근을 α, β 라 하자.
(i) 한 근은 양, 다른 근은 음일 때,
 $\alpha\beta = k^2 - 1 < 0, (k+1)(k-1) < 0$
 $\therefore -1 < k < 1$
(ii) 한 근은 양, 다른 근은 0일 때,
 $\alpha + \beta = k(k+3) > 0 \quad \therefore k > 0, k < -3$
 $\alpha\beta = k^2 - 1 = 0 \quad \therefore k = \pm 1$
따라서, $k = 1$
그러므로, (i)과 (ii)에서 $-1 < k \leq 1$

4. 정수 a, b 에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + b = 0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ 의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?
- ① 무리수이다. ② 정수가 아닌 유리수이다.
③ 정수이다. ④ 홀수인 자연수이다.
⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

큰과 계수와의 관계에서

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= -a(\text{정수}), \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \alpha\beta\gamma = -b \\ \therefore \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &\quad - a^2(\text{정수}) \end{aligned}$$

$$= a^2(\text{정수})$$

$$\begin{aligned} & \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\ &= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a(a^2 - 0) - 3b = -a^3 - 3b \text{ (정수)}$$

그러나 $a > 0$, $b > 0$ 일면

그러나 $a > 0, b > 0$ 이면
 $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ 은 자연수가 되지 않는다.

5. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 은 서로 다른 두 근 α, β 를 갖는다.
 $f(x) = x^2 + bx + a$ 에 대하여 $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

근과 계수와의 관계에서
 $\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$
 $f(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + a = \beta \cdots \textcircled{㉠}$
 $f(\beta) = \beta^2 + b\beta + a = \alpha \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 하면
 $\alpha^2 - \beta^2 + b(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$
 $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + b + 1) = 0$
 $\alpha \neq \beta$ 이므로 $\alpha + \beta + b + 1 = 0$
 $\therefore -a + b + 1 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$
 $\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 하면
 $\alpha^2 + \beta^2 + b(\alpha + \beta) + 2a = \alpha + \beta$
 $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (b - 1)(\alpha + \beta) + 2a = 0$
 $\therefore a^2 - 2b - a(b - 1) + 2a = 0 \cdots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢}$ 에서 $b = a - 1$ 을 $\textcircled{㉣}$ 에 대입하면
 $a^2 - 2(a - 1) - a(a - 1 - 1) + 2a = 0, 2a + 2 = 0$
 $\therefore a = -1, b = -2$
 $\therefore a + b = -3$