1. 이차방정식 $|x^2-5|=4x$의 모든 근의 합은?

① 5 ② 0 ③ 6 ④ 10 ⑤ 12

해설

i) $x^2-5\ge 0 \Rightarrow x\le -\sqrt{5}$ 또는 $x\ge \sqrt{5}$ $\cdots$ ㉠

$x^2-4x-5=0$

$(x+1)(x-5)=0$

$x=-1$ 또는 5

$\Rightarrow\ x=5$ ($\because$ ㉠)

ii) $x^2-5<0 \Rightarrow -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$ $\cdots$ ㉡

$x^2+4x-5=0$

$(x-1)(x+5)=0$

$x=1$ 또는 -5

$\Rightarrow\ x=1$ ($\because$ ㉡)

$\therefore$ 근의 합 : 6

2. 이차방정식 $2x^2+x-5=0$을 만족하는 양수 x에 대하여 $(4x-\sqrt{41})^2+(2x-1)(x+1)$의 값은?

① 4　② 2　③ -1　④ 5　⑤ -5

해설

근의 공식을 이용하여 x를 구하면

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{41}}{4}$$

$x>0$이므로 $x=\dfrac{-1+\sqrt{41}}{4}$

$4x-\sqrt{41}=-1,\ 2x^2+x=5$

(준식)$=(-1)^2+(2x^2+x-1)=1+(5-1)=5$

3. x에 관한 이차방정식 $x^2-k(k+3)x+k^2-1=0$의 두 근 중 단 하나만이 양이 되기 위한 실수 k의 조건은?

① $-1<k\le 1$ ② $-1<k<1$ ③ $0<k\le 2$

④ $-1\le k\le 0$ ⑤ $-1\le k\le 1$

해설

이차방정식의 두 근을 α, β라 하자.

(i) 한 근은 양, 다른 근은 음일 때,

$\alpha\beta=k^2-1<0,\ (k+1)(k-1)<0$

$\therefore\ -1<k<1$

(ii) 한 근은 양, 다른 근은 0일 때,

$\alpha+\beta=k(k+3)>0 \quad \therefore\ k>0,\ k<-3$

$\alpha\beta=k^2-1=0 \quad \therefore\ k=\pm 1$

따라서, $k=1$

그러므로, (i)과 (ii)에서 $-1<k\le 1$

4. 정수 a, b에 대하여 삼차방정식 $x^3 + ax^2 + b = 0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$의 값에 대한 설명으로 옳은 것은?

① 무리수이다.
② 정수가 아닌 유리수이다.
③ 정수이다.
④ 홀수인 자연수이다.
⑤ 짝수인 자연수이다.

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta + \gamma = -a(\text{정수})$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0$, $\alpha\beta\gamma = -b$

$$\begin{aligned} \therefore\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &= a^2(\text{정수}) \end{aligned}$$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$

$= (\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\} + 3\alpha\beta\gamma$

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = -a(a^2 - 0) - 3b = -a^3 - 3b(\text{정수})$

그러나 $a > 0,\ b > 0$이면

$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$은 자연수가 되지는 못한다.

5. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 서로 다른 두 근 α, β를 갖는다. $f(x)=x^2+bx+a$에 대하여 $f(\alpha)=\beta$, $f(\beta)=\alpha$가 성립할 때, $a+b$의 값은?

① 0 ② -1 ③ -2 ④ -3 ⑤ -4

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$

$f(\alpha)=\alpha^2+b\alpha+a=\beta\cdots$ ㉠

$f(\beta)=\beta^2+b\beta+a=\alpha\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡하면

$\alpha^2-\beta^2+b(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+b+1)=0$

$\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha+\beta+b+1=0$

$\therefore\ -a+b+1=0\cdots$ ㉢

㉠ + ㉡하면

$\alpha^2+\beta^2+b(\alpha+\beta)+2a=\alpha+\beta$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(b-1)(\alpha+\beta)+2a=0$

$\therefore\ a^2-2b-a(b-1)+2a=0\cdots$ ㉣

㉢에서 $b=a-1$을 ㉣에 대입하면

$a^2-2(a-1)-a(a-1-1)+2a=0,\ 2a+2=0$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-3$