

1.  $x$ 에 대한 이차방정식  $kx^2 + (2k+1)x + 6 = 0$ 의 해가 2,  $\alpha$ 일 때,  $k + \alpha$ 의 값을 구하면?

① -1

② -2

③ -3

④ -4

⑤ -5

해설

해가 2,  $\alpha$ 라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$$k \cdot 2^2 + (2k+1)2 + 6 = 0$$

$$4k + 4k + 8 = 0 \text{에서 } k = -1$$

$k = -1$ 을 방정식에 대입하고  $\alpha$ 를 구한다.

$$-x^2 - x + 6 = 0, x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0, x = 2, -3$$

$$\therefore k = -1, \alpha = -3$$

$$\therefore k + \alpha = -4$$

2. 이차방정식  $3x^2 - 6x + k = 0$  이 허근을 갖도록 실수  $k$  의 범위를 정하면?

①  $k \leq 3$     ②  $k > 3$     ③  $k \leq 2$     ④  $k > 2$     ⑤  $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 :  $D < 0$

$$3x^2 - 6x + k = 0$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$$

$$\therefore k > 3$$

3. 계수가 실수인  $x$ 에 대한 이차방정식  $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이  $k$ 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수  $a, b$ 의 값은?

- ①  $a = 1, b = 2$       ②  $a = 0, b = 3$       ③  $a = -1, b = 2$   
④  $a = 0, b = 2$       ⑤  $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 판별식이 0이다.

$$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2ak + a^2 - b + 3 = 0$$

모든  $k$ 에 대해 성립하려면

$$-2a = 0, \quad a^2 - b + 3 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 3$$

4. 이차방정식  $x^2 - 2ix - k = 0$  의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

- ㉠  $k > 1$  이면 두 근은 실근이다.
- ㉡  $k = 1$  이면 중근을 갖는다.
- ㉢ 두 근의 곱은 실수이다.
- ㉣  $0 < k < 1$  이면 두 근은 순허수이다.

- ① ㉠, ㉡                      ② ㉡, ㉣                      ③ ㉠, ㉡, ㉣  
④ ㉡, ㉢, ㉣                      ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여  $x^2 - 2ix - k = 0$  의 근을 구하면  $x = i \pm \sqrt{-1+k}$   
㉠  $k > 1$  이어도  $x$  는 허수이다.<거짓>  
㉡  $k = 1$  이면  $x = i$  로 중근을 갖는다.<참>  
㉢ 두 근의 곱  $-k$  는 허수일 수도 있다.<거짓>  
㉣  $0 < k < 1$  이면  $-1 < -1+k < 0$  이므로  $\sqrt{-1+k} = ai(a \neq 1)$  의 형태가 되어  $x$  는 순허수이다.

5. 다음 방정식을 풀면?

$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$

- ①  $x=-1$  또는  $x=-\sqrt{3}$

②  $x=-1$  또는  $x=-\sqrt{3}-1$

③  $x=-1$  또는  $x=\sqrt{3}+1$

④  $x=1$  또는  $x=-\sqrt{3}+1$

⑤  $x=1$  또는  $x=\sqrt{3}+1$

해설

$x^2$ 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에  $\sqrt{3}+1$ 을 곱하면  
 $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$   
 $2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$   
 $x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$   
 $(x-1)\{x-(\sqrt{3}+1)\}=0$   
 $\therefore x=1$  또는  $x=\sqrt{3}+1$

6. 0이 아닌 두 실수  $a, b$ 가  $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 를 만족할 때, 다음 [보기]의  $x$ 에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠  $ax^2 - bx + 1 = 0$
- ㉡  $x^2 - ax - b = 0$
- ㉢  $x^2 + 2(a + b)x + (a^2 + b^2) = 0$

- ① ㉠

② ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$ 이므로  $a < 0, b < 0$   
㉠  $ax^2 - bx + 1 = 0$ 에서  
 $D = b^2 - 4a > 0$   
㉡  $x^2 - ax - b = 0$ 에서  
 $D = a^2 + 4b$ 는 음수, 양수를 판별할 수 없다.  
㉢  $x^2 + 2(a + b)x + (a^2 + b^2) = 0$ 에서  
 $\frac{D}{4} = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

7. 이차방정식  $x^2 + 2x + 3 = 0$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라고 할 때,  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha\beta$ 를 두 근으로 하고  $x^2$ 의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

①  $x^2 + 6x - 1 = 0$

②  $x^2 - 6x - 1 = 0$

③  $x^2 + x - 6 = 0$

④  $x^2 - x + 6 = 0$

⑤  $x^2 - x - 6 = 0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$$\alpha + \beta = -2, \quad \alpha\beta = 3$$

-2, 3을 근으로 하는 이차방정식은

$$(x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

8. 서현이와 주현이가 이차방정식  $x^2+ax+b=0$ 을 함께 풀었다. 그런데 서현이는  $a$ 를 잘못 보고 풀어서 두 근 1, 3을 얻었고, 주현이는  $b$ 를 잘못 보고 풀어서 두 근  $-1, -4$ 를 얻었다. 이 때, 처음 이차방정식은?
- ①  $x^2-5x+3=0$                       ②  $x^2+5x+3=0$   
③  $x^2+5x+13=0$                       ④  $x^2+5x-13=0$   
⑤  $x^2+5x+15=0$

해설

서현이가 잘못 본 일차항의 계수  $a$ 를  $a'$ ,  
주현이가 잘못 본 상수항  $b$ 를  $b'$ 이라 하자.  
 $x^2+a'x+b=0$ 의 두 근이 1, 3이므로  
 $b=1\times 3=3$   
 $x^2+ax+b'=0$ 의 두 근이  $-1, -4$ 이므로  
 $-a=(-1)+(-4)=-5$   
 $\therefore a=5$   
따라서 처음의 이차방정식은  $x^2+5x+3=0$

9.  $a^2 - 3a + 1 = 0$  일 때,  $a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1}$  의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$a^2 - 3a + 1 = 0$  에서

$$a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1} = a - 1 + \frac{3}{3a} = a + \frac{1}{a} - 1$$

한편,  $a^2 - 3a + 1 = 0$  의 양변을  $a$  로 나누면

$$a - 3 + \frac{1}{a} = 0 \quad \therefore a + \frac{1}{a} = 3$$

$$\therefore (\text{준식}) = \left(a + \frac{1}{a}\right) - 1 = 2$$

10.  $x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$ 가  $x, y$ 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수  $a$ 의 값을 구하면 ?

①  $\frac{2}{9}$

②  $\frac{1}{3}$

③  $\frac{4}{9}$

④  $\frac{5}{9}$

⑤  $\frac{2}{3}$

해설

$$x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$$

$$= x^2 + (y+1)x + ay^2 + y - 2$$

$x, y$ 의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$$D = (y+1)^2 - 4(ay^2 + y - 2)$$

$$= y^2 + 2y + 1 - 4ay^2 - 4y + 8$$

$$= (1 - 4a)y^2 - 2y + 9$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 9(1 - 4a) = 0$$

$$\therefore 1 - 9 + 36a = 0$$

$$\therefore a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

11. 실계수의 이차방정식  $x^2 + bx + c = 0$ 이 허근  $\alpha, \beta$ 를 갖고, 두 허근 사이에  $\alpha^2 + 2\beta = 1$ 인 관계가 성립한다고 한다. 이 때,  $b+c$ 의 값은?

① -1      ② 1      ③ 3      ④ 5      ⑤ 7

해설

계수가 실수이므로  
 $\alpha = p + qi$  이면  $\beta = p - qi$  ( $q \neq 0$ )  
 $\alpha^2 + 2\beta = 1$  이므로  
 $(p + qi)^2 + 2(p - qi) = 1$  에서  
 $(p^2 - q^2 + 2p - 1) + 2q(p - 1)i = 0$   
 $\therefore p^2 - q^2 + 2p - 1 = 0, 2q(p - 1) = 0$   
 $q \neq 0$  이므로  
 $p = 1, q^2 = 2$   
 $\therefore \alpha + \beta = 2p = 2, \alpha\beta = p^2 + q^2 = 3$   
 $\therefore x^2 - 2x + 3 = 0$   
 $\therefore b = -2, c = 3$   
 $\therefore b + c = 1$

12. 방정식  $x^2 + 2(m-1)x - m + 3 = 0$ 의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수  $m$ 의 범위를 정하면?

- ①  $-2 < m < 3$       ②  $2 \leq m < 3$       ③  $-1 < m < 3$   
④  $1 < m \leq 3$       ⑤  $3 < m \leq 4$

해설

두 근을  $\alpha, \beta$ 라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

$$(i) \quad \frac{D}{4} = (m-1)^2 + m - 3 \geq 0$$

$$m^2 - m - 2 \geq 0, (m-2)(m+1) \geq 0$$

$$\therefore m \leq -1, m \geq 2$$

$$(ii) \quad \alpha + \beta = -2(m-1) < 0 \quad \therefore m > 1$$

$$(iii) \quad \alpha\beta = -m + 3 > 0 \quad \therefore m < 3$$

$$\therefore (i), (ii), (iii) \text{의 공통범위는 } 2 \leq m < 3$$

13.  $|1-|1-|1-x|| = x-1$ 을 만족시키는  $x$ 의 최솟값, 최댓값을 각각  $m, M$ 이라 할 때,  $m+M$ 의 값을 구하면?

① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4                      ⑤ 5

해설

$x-1 = |1-|1-|1-x|| \geq 0$   
 $\therefore x \geq 1$   
 $x \geq 1$ 이면  $|1-x| = x-1$   
 $\therefore |1-|1-x|| = |1-(x-1)| = |2-x|$   
 $1 \leq x \leq 2$ 이면  
 $|2-x| = 2-x$ 이므로  
(좌변)  $= |1-(2-x)|$   
 $= |x-1|$   
 $= x-1 = (\text{우변})$   
 $\therefore 1 \leq x \leq 2$ 인 모든 실수  $x$   
 $\therefore m=1, M=2, \quad M+m=3$

14.  $x_1^2 - 3x_1 = 7$ 이고,  $x_2^2 - 3x_2 = 7$ 일 때,  $x_1^3 + x_2^3$ 의 값은?

① 60

② 66

③ 72

④ 84

⑤ 90

해설

$x_1$ 과  $x_2$ 는  $x^2 - 3x - 7 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수와의 관계로부터

$$x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = -7$$

$$\text{따라서 } x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

$$= 3^3 - 3 \cdot (-7) \cdot 3 = 90$$

15.  $m > 0$ 이고 이차방정식  $mx^2 + (3m-5)x - 24 = 0$ 의 두 근의 절대값의 비가 3 : 2일 때, 정수가 아닌  $m$ 의 값은?

- ①  $\frac{25}{9}$       ②  $\frac{26}{9}$       ③  $\frac{28}{9}$       ④  $\frac{29}{9}$       ⑤  $\frac{31}{9}$

해설

$m > 0$ 에서 두 근의 곱이  $-\frac{24}{m} < 0$ 이므로

서로 다른 부호의 두 실근을 갖는다.

따라서, 방정식의 두 근을  $3\alpha$ ,  $-2\alpha$ 라 놓을 수 있다.

근과 계수와의 관계로부터

$$\begin{cases} 3\alpha + (-2\alpha) = -\frac{3m-5}{m} \\ 3\alpha(-2\alpha) = -\frac{24}{m} \end{cases}$$

$$\therefore \left(-\frac{3m-5}{m}\right)^2 = \frac{4}{m} \quad \therefore (3m-5)^2 = 4m$$

정리하여 인수분해하면  $(9m-25)(m-1) = 0$

$$\therefore m = \frac{25}{9}, 1$$

따라서 정수가 아닌  $m$ 의 값은  $\frac{25}{9}$ 이다.