1. x에 대한 이차방정식 $kx^2+(2k+1)x+6=0$의 해가 $2,\ \alpha$일 때, $k+\alpha$의 값을 구하면?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

해가 $2, \alpha$라면 방정식에 2를 대입하면 0이 된다.

$k\cdot 2^2+(2k+1)2+6=0$

$4k+4k+8=0$에서 $k=-1$

$k=-1$을 방정식에 대입하고 α를 구한다.

$-x^2-x+6=0,\ x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0,\ x=2,-3$

$\therefore k=-1,\ \alpha=-3$

$\therefore\ k+\alpha=-4$

2. 이차방정식 $3x^2-6x+k=0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \le 3$　② $k > 3$　③ $k \le 2$　④ $k > 2$　⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D<0$

$3x^2-6x+k=0$

$$\frac{D}{4}=9-3k<0$$

$\therefore\ k>3$

3. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$ 이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$ ② $a=0, b=3$ ③ $a=-1, b=2$

④ $a=0, b=2$ ⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D' = (k-a)^2-(k^2+b-3)=0$

$\Rightarrow \quad -2ak+a^2-b+3=0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a=0,\ a^2-b+3=0$

$\therefore \quad a=0, b=3$

4. 이차방정식 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근에 대한 <보기> 의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $k > 1$ 이면 두 근은 실근이다.

㉡ $k = 1$ 이면 중근을 갖는다.

㉢ 두 근의 곱은 실수이다.

㉣ $0 < k < 1$ 이면 두 근은 순허수이다.

① ㉠, ㉡　② ㉡, ㉣　③ ㉠, ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉢, ㉣　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2 - 2ix - k = 0$ 의 근을 구하면 $x = i \pm \sqrt{-1+k}$

㉠ $k > 1$ 이어도 x 는 허수이다.<거짓>

㉡ $k = 1$ 이면 $x = i$ 로 중근을 갖는다.<참>

㉢ 두 근의 곱 $-k$ 는 허수일 수도 있다.<거짓>

㉣ $0 < k < 1$ 이면 $-1 < -1 + k < 0$ 이므로 $\sqrt{-1+k} = ai(a \neq 1)$ 의 형태가 되어 x 는 순허수이다.

5. 다음 방정식을 풀면?

$$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$

② $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$

③ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

④ $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$

⑤ $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

해설

x^2의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3}+1$을 곱하면

$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$

$2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$

$x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$

$(x-1)\left\{x-(\sqrt{3}+1)\right\}=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

6. 0이 아닌 두 실수 a, b가 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$를 만족할 때, 다음 [보기]의 x에 대한 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이므로 $a < 0,\ b < 0$

㉠ $ax^2 - bx + 1 = 0$에서

$D = b^2 - 4a > 0$

㉡ $x^2 - ax - b = 0$에서

$D = a^2 + 4b$는 음수, 양수를 판별할 수 없다.

㉢ $x^2 + 2(a+b)x + (a^2 + b^2) = 0$에서

$\frac{D}{4} = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = 2ab > 0$

7. 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구하면?

① $x^2+6x-1=0$ ② $x^2-6x-1=0$

③ $x^2+x-6=0$ ④ $x^2-x+6=0$

⑤ $x^2-x-6=0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해

$\alpha+\beta=-2, \quad \alpha\beta=3$

$-2, 3$을 근으로 하는 이차방정식은

$(x+2)(x-3)=0$

$x^2-x-6=0$

8. 서현이와 주현이가 이차방정식 $x^2+ax+b=0$을 함께 풀었다. 그런데 서현이는 a를 잘못 보고 풀어서 두 근 1, 3을 얻었고, 주현이는 b를 잘못 보고 풀어서 두 근 -1, -4를 얻었다. 이 때, 처음 이차방정식은?

① $x^2-5x+3=0$

② $x^2+5x+3=0$

③ $x^2+5x+13=0$

④ $x^2+5x-13=0$

⑤ $x^2+5x+15=0$

해설

서현이가 잘못 본 일차항의 계수 a를 a',
주현이가 잘못 본 상수항 b를 b' 이라 하자.
$x^2+a'x+b=0$의 두 근이 1, 3이므로
$b=1\times 3=3$
$x^2+ax+b'=0$의 두 근이 -1, -4이므로
$-a=(-1)+(-4)=-5$
$\therefore\ a=5$
따라서 처음의 이차방정식은 $x^2+5x+3=0$

9. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$$a^2-2a+\frac{3}{a^2+1}=a-1+\frac{3}{3a}=a+\frac{1}{a}-1$$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$$a-3+\frac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\frac{1}{a}=3$$

$$\therefore(\text{준식})=\left(a+\frac{1}{a}\right)-1=2$$

10. $x^2+xy+ay^2+x+y-2$가 $x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$x^2+xy+ay^2+x+y-2$

$=x^2+(y+1)x+ay^2+y-2$가

$x,\ y$의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$D=(y+1)^2-4(ay^2+y-2)$

$\quad=y^2+2y+1-4ay^2-4y+8$

$\quad=(1-4a)y^2-2y+9$에서

$\frac{D}{4}=1-9(1-4a)=0$

$\therefore\ 1-9+36a=0$

$\therefore\ a=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

11. 실계수의 이차방정식 $x^2+bx+c=0$이 허근 $\alpha,\ \beta$를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2+2\beta=1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

계수가 실수이므로

$\alpha=p+qi$ 이면 $\beta=p-qi\ (q\neq 0)$

$\alpha^2+2\beta=1$ 이므로

$(p+qi)^2+2(p-qi)=1$ 에서

$(p^2-q^2+2p-1)+2q(p-1)i=0$

$\therefore p^2-q^2+2p-1=0,\ 2q(p-1)=0$

$q\neq 0$이므로

$p=1,\ q^2=2$

$\therefore\ \alpha+\beta=2p=2,\quad \alpha\beta=p^2+q^2=3$

$\therefore\ x^2-2x+3=0$

$\therefore\ b=-2,\ c=3$

$\therefore\ b+c=1$

12. 방정식 $x^2+2(m-1)x-m+3=0$의 두 근을 모두 음이 되게 하는 실수 m의 범위를 정하면?

① $-2<m<3$　② $2\le m<3$　③ $-1<m<3$

④ $1<m\le 3$　⑤ $3<m\le 4$

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때 두 근이 모두 음수이므로

(i) $\dfrac{D}{4}=(m-1)^2+m-3\ge 0$

$m^2-m-2\ge 0,\ (m-2)(m+1)\ge 0$

$\therefore\ m\le -1,\ m\ge 2$

(ii) $\alpha+\beta=-2(m-1)<0\quad \therefore\ m>1$

(iii) $\alpha\beta=-m+3>0\quad \therefore\ m<3$

$\therefore$ (i), (ii), (iii)의 공통범위는 $2\le m<3$

13. $|1-|1-|1-x||| = x-1$을 만족시키는 x의 최솟값, 최댓값을 각각 m, M이라 할 때, $m+M$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x-1 = |1-|1-|1-x||| \geq 0$

$\therefore \ x \geq 1$

$x \geq 1$이면 $|1-x| = x-1$

$\therefore |1-|1-x|| = \left|1-(x-1)\right| = |2-x|$

$1 \leq x \leq 2$이면

$|2-x| = 2-x$이므로

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \left|1-(2-x)\right| \\ &= |x-1| \\ &= x-1 = (\text{우변})\end{aligned}$$

$\therefore \ 1 \leq x \leq 2$인 모든 실수 x

$\therefore \ m=1,\ M=2,\quad M+m=3$

14. $x_1^2 - 3x_1 = 7$이고, $x_2^2 - 3x_2 = 7$일 때, $x_1^3 + x_2^3$의 값은?

① 60 ② 66 ③ 72 ④ 84 ⑤ 90

해설

x_1과 x_2는 $x^2 - 3x - 7 = 0$의 두 근이므로 근과 계수와의 관계로부터

$x_1 + x_2 = 3,\ x_1x_2 = -7$

따라서 $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$

$= 3^3 - 3 \cdot (-7) \cdot 3 = 90$

15. $m > 0$이고 이차방정식 $mx^2 + (3m-5)x - 24 = 0$의 두 근의 절댓값의 비가 $3:2$일 때, 정수가 아닌 m의 값은?

① $\frac{25}{9}$ ② $\frac{26}{9}$ ③ $\frac{28}{9}$ ④ $\frac{29}{9}$ ⑤ $\frac{31}{9}$

해설

$m > 0$에서 두 근의 곱이 $-\frac{24}{m} < 0$이므로

서로 다른 부호의 두 실근을 갖는다.

따라서, 방정식의 두 근을 $3\alpha,\ -2\alpha$라 놓을 수 있다.

근과 계수와의 관계로부터

$$\begin{cases} 3a + (-2\alpha) = -\dfrac{3m-5}{m} \\ 3\alpha(-2\alpha) = -\dfrac{24}{m} \end{cases}$$

$$\therefore \left(-\frac{3m-5}{m}\right)^2 = \frac{4}{m} \qquad \therefore (3m-5)^2 = 4m$$

정리하여 인수분해하면 $(9m-25)(m-1) = 0$

$$\therefore m = \frac{25}{9},\ 1$$

따라서 정수가 아닌 m의 값은 $\frac{25}{9}$이다.