1. $i + i^3 + i^5 + i^7 + \cdots + i^{101} = a + bi$ 일 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

(좌변)$= i - i + i - i + \cdots + i = i$ 이므로
$i = a + bi$ 에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a = 0$, $b = 1$
$\therefore\ a + b = 1$

2. x^3+x^2+2를 다항식 x^2+2x-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 나머지를 $R(x)$라 할 때, $Q(x)+R(x)$의 값은?

① $2x-3$ ② $2x$ ③ $3x+2$
④ $4x$ ⑤ $4x+1$

해설
x^3+x^2+2를 x^2+2x-1로 직접 나누면
$Q(x)=x-1$, $R(x)=3x+1$
$\therefore\ Q(x)+R(x)=4x$

3. $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$ 일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ 1 ⑤ 4

해설

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$ 에 대입하면

$ab+bc+ca=-\frac{1}{2}$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

$\frac{1}{4}=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$

따라서 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=\frac{1}{4}$

4. 등식 $x^3 + ax^2 + 2x + b = (x^2 + x + 1)Q(x) + 2x + 1$이 x에 대한 항등식일 때, $a + b$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$Q(x) = x + c$라고 두고 전개하여 계수를 비교하면
$a = 0,\ b = 0,\ c = -1$이므로 $a + b = 0$

해설

$x^3 + ax^2 + 2x + b$를 $x^2 + x + 1$로 직접 나눗셈을 하면,

$$
\begin{array}{rl}
 & x+(a-1) \\
x^2+x+1 \,) & \overline{x^3+ax^2+\qquad 2x+b} \\
- & x^3+\ x^2+\qquad\quad x \\
 & \overline{(a-1)x^2+\qquad x+b} \\
- & (a-1)x^2+(a-1)x+(a-1) \\
 & \overline{\qquad\qquad (2-a)x+b-a+1}
\end{array}
$$

$2 - a = 2,\ b - a + 1 = 1$
$a = 0,\ b = 0$

5. 두 다항식 x^2+3x+a, x^2-3x+b의 최대공약수가 $x-1$일 때, 두 다항식의 최소공배수를 $f(x)$라 하자. $f(0)$의 값을 구하면?

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

해설

$x-1$이 최대 공약수라면 두 식에
$x=1$을 대입하면 0이 된다.
$A : x^2+3x+a$ 에 $x=1$을 대입하면
$1+3+a=0 \;\therefore a=-4$
$B : x^2-3x+b$ 에 $x=1$을 대입하면
$1-3+b=0 \;\therefore b=2$
$A : x^2+3x-4=(x-1)(x+4)$
$B : x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$
최소공배수 $f(x)=(x-1)(x+4)(x-2)$가 된다.
$f(0)=(-1)\cdot(4)\cdot(-2)=8$

6. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2-8$이고, 최소공배수가 x^3-2x^2-5x+6이다. 두 다항식의 상수항을 a, b라 할 때, ab의 값은?

① -8 ② -3 ③ 0 ④ 6 ⑤ 12

해설

두 다항식의 합에도 최대공약수가 들어 있으므로
$2x^2-8=2(x-2)(x+2)$
$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$
따라서 두 다항식의 최소공배수는 $x+2$이고 두 다항식의 차수가 같으므로 두 다항식은 이차식이다.
$(x+2)(x-1)=x^2+x-2$
$(x+2)(x-3)=x^2-x-6$
$\therefore\ ab=(-2)\times(-6)=12$

7. 복소수 $z = (1+i)x^2 + x - (2+i)$가 0이 아닌 실수가 되도록 실수 x의 값을 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① -1 ② 1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 2

해설

복소수 z를 $a+bi$ (a, b는 실수) 의 꼴로 정리하면
$z = (x^2 + x - 2) + (x^2 - 1)i$
이것이 실수가 되려면 허수부분이 0이 되어야 한다.
즉, $x^2 - 1 = 0$, $x = \pm 1$
한편, $x = 1$이면 $z = 0 + 0i = 0$이므로
$z \neq 0$라는 조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ x = -1$

8. 복소수 $(1+i)x^2+2(2+i)x+3-3i$를 제곱하면 음의 실수가 된다. 이 때, 실수 x의 값은?
(단, $i^2=-1$)

① -1　② 1　③ -3　④ 3　⑤ 7

해설

$(x^2+4x+3)+(x^2+2x-3)i$가 순허수이어야 하므로
$x^2+4x+3=0,\ x^2+2x-3\neq 0$
$(x+3)(x+1)=0,\ x=-1,\ x=-3$
$(x+3)(x-1)\neq 0,\ x\neq 1,\ x\neq -3$
$\therefore\ x=-1$

9. $\sqrt{(y-x)^2}+(y-1)i=-2x-3i$ 를 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $\frac{x}{y}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

$|y-x|+(y-1)i=-2x-3i$

$|y-x|=-2x$

$y-1=-3 \quad \therefore\ y=-2$

(i) $y \geq x$ 일 때

$y-x=-2x,\ y=-x,\ x=2$ (모순)

(ii) $y < x$ 일 때

$x-y=-2x,\ y=3x$

$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (성립)

$\therefore\ \frac{x}{y}=\frac{x}{3x}=\frac{1}{3}$

10. $\overline{z-zi}=1-i$ 를 성립시키는 복소수 z 은?(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수이다.)

① $-i$ ② 0 ③ i
④ $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$ ⑤ $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$

해설

$$\begin{aligned}\overline{z-zi} &= \overline{z(1-i)} \\ &= \bar{z}\cdot\overline{1-i} \\ &= \bar{z}(1+i) \\ &\bar{z}(1+i)=(1-i)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \bar{z}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$$

$$\therefore\ z=i$$

11. 이차방정식 $x^2 + ax + 2b = 0$의 한 근이 $2 + ai$일 때 실수 a, b의 합 $a + b$의 값은? (단 $a \neq 0$)

① -9　② -5　③ 3　④ 6　⑤ 12

해설

한 근이 $2 + ai$이므로 다른 한 근은 $2 - ai$이다.

$\therefore$두 근의 합 $-a = 4$ $\quad \therefore a = -4$

두 근의 곱 $(2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 2b$

$\therefore b = 10 \quad \therefore a + b = 10 - 4 = 6$

12. 이차방정식 $\sqrt{3}x^2-(\sqrt{3}+3)x+3=0$의 두 근을 a, b라 할 때, $a\times b$의 값은?

① $-\sqrt{3}$　② -1　③ 0　④ 1　⑤ $\sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $\sqrt{3}$을 곱하면

$3x^2-(3+3\sqrt{3})x+3\sqrt{3}=0$

$x^2-(1+3)x+\sqrt{3}=0$

$(x-1)(x-\sqrt{3})=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$\therefore\ a\times b=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$

13. 이차방정식 $x^2-(a+2)x+a=0$의 두 근의 차가 2일 때, 상수 a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 근을 α, β라 하면

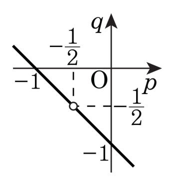
$\alpha+\beta=a+2$, $\alpha\beta=a$

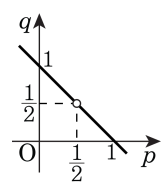
$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

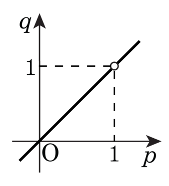
$4=a^2+4a+4-4a$

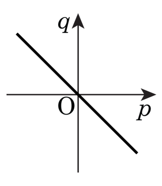
$\therefore\ a=0$

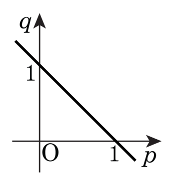
14. x에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2-px-q=0$, $x^2-qx-p=0$이 오직 하나의 공통근을 갖는다. 이 때, p, q의 관계를 나타낸 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$$\begin{cases} x^2-px-q=0 & \cdots ① \\ x^2-qx-p=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①−②에서 $(-p+q)x-(-p+q)=0$

$\therefore\ (-p+q)(x-1)=0$

여기서 $-p+q=0$이면 즉 $q=p$이면

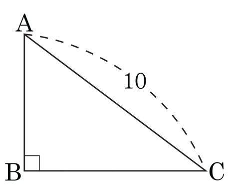
①, ②가 같게 되어 주어진 문제의 조건에 모순이다.

$\therefore\ x=1$이다.

이 때 ①에서 $1-p-q=0$

따라서 구하는 식은 $q=-p+1$(단, $p\neq q$)

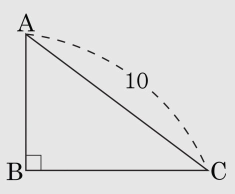
15. 다음 그림의 직각삼각형 ABC 에서 둘레의 길이가 24 이고, 빗변의 길이가 10 이다. 이때, 두 선분 AB 와 BC 의 길이의 곱을 구하면?



① 48 ② 40 ③ 32

④ 18 ⑤ 12

해설



$\overline{\mathrm{AB}} = a, \overline{\mathrm{BC}} = b$

둘레의 길이가 24 이므로

$24 = a + b + 10$

$a + b = 14$

직각삼각형이므로,

$a^2 + b^2 = 10^2$

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$ab = \frac{1}{2}\{(a+b)^2 - (a^2 + b^2)\}$

$= \frac{1}{2}\left\{14^2 - 10^2\right\} = \frac{1}{2} \cdot 96 = 48$

16. x에 대한 항등식 $(x^2-x-1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$에서 $a_1+a_3+a_5$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

양변에 $x=1$을 대입하면,
$-1 = a_0 + a_1 + \cdots + a_6 \cdots$㉠
양변에 $x=-1$을 대입하면,
$1 = a_0 - a_1 + \cdots + a_6 \cdots$㉡
㉠ − ㉡: $-2 = 2(a_1+a_3+a_5)$
$\therefore a_1+a_3+a_5 = -1$

17. 정식 $f(x)$를 x^2-3x+2로 나눌 때 3이 남고, x^2-4x+3으로 나눌 때 $3x$가 남는다. $f(x)$를 x^2-5x+6으로 나눌 때, 나머지를 구하면?

① $6x-1$ ② $6x-2$ ③ $6x-3$

④ $6x-5$ ⑤ $6x-9$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q_1(x)+3 \\ &= (x-1)(x-2)Q_1(x)+3 \cdots\cdots ㉠ \\ f(x) &= (x^2-4x+3)Q_2(x)+3x \\ &= (x-1)(x-3)Q_2(x)+3x \cdots\cdots ㉡ \\ f(x) &= (x^2-5x+6)Q(x)+ax+b \\ &= (x-2)(x-3)Q(x)+ax+b \cdots\cdots ㉢ \end{aligned}$$

㉠, ㉢에서 $f(2)=3=2a+b$ ⋯⋯㉣

㉡, ㉣에서 $f(3)=9=3a+b$ ⋯⋯㉤

∴㉣, ㉤에서 $a=6$, $b=-9$

∴나머지는 $6x-9$

18. 함수 $f(x)=x^2+px+q$와 $g(x)$는 유리수를 계수로 갖는 다항식이고, $f(\sqrt{2}+1)=0$, $g(\sqrt{2}+1)=2+\sqrt{2}$이다. 이 때, $g(x)$를 $f(x)$로 나눈 나머지는?

① $x+1$ ② $x-1$ ③ $-x+1$

④ $-x-1$ ⑤ $2x+1$

해설

$g(x)$를 $f(x)$로 나눈 몫을 $Q(x)$

나머지를 $ax+b$라 하면

$g(x)=f(x)Q(x)+ax+b$

$g(\sqrt{2}+1)=f(\sqrt{2}+1)Q(\sqrt{2}+1)+a(\sqrt{2}+1)+b$

$\quad\quad=a(\sqrt{2}+1)+b \ (\because\ f(\sqrt{2}+1)=0)$

$\therefore\ a+b+a\sqrt{2}=2+\sqrt{2}$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

따라서 구하는 나머지는 $x+1$

19. $a^2-b^2+c^2-d^2+2(ac+bd)$를 바르게 인수분해 한 것은?

① $(a+b-c-d)(a-b+c+d)$

② $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$

③ $(a+b+c-d)(a-b+c+d)$

④ $(a-b+c-d)(a-b+c+d)$

⑤ $(a+b+c+d)(a-b-c+d)$

해설

$a^2-b^2+c^2-d^2+2(ac+bd)$
$=(a^2+2ac+c^2)-(b^2-2bd+d^2)$
$=(a+c)^2-(b-d)^2$
$=(a+b+c-d)(a-b+c+d)$

20. 다음 중 다항식 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ 의 인수가 아닌 것은?

① $a-b$　　② $b-c$　　③ $c-a$

④ $a+b+c$　　⑤ $a-b+c$

해설

주어진 식을 a에 관하여 정리하면

(준식)$= a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$= (b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}$

$= (b-c)\{b^2(c-a)+b(c^2-ca)-a(c^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b^2+bc-ac-a^2)$

$= (b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$

$= (b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$

21. $z=\dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1+z+z^2+\cdots+z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$ ② -1 ③ 0 ④ i ⑤ 1

해설

$z=\dfrac{1+i}{1-i}=i, z^2=-1,\ z^3=-i,\ z^4=1$

(준식) : $1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2008}$

처음 네 항의 합 :

$1+i-1-i=0$

$1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2008}$

$=0+0+\cdots+0+z^{2008}$

$=z^{2008}$

$=(z^4)^{502}$

$=1$

22. 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}$을 간단히 하면?

① $\frac{1}{\beta}$ ② $\frac{2}{\beta}$ ③ β ④ 2β ⑤ β^2

해설

$\beta^2-\beta+1=0$

$\alpha\beta=1$에서 $\beta=\frac{1}{\alpha}$,

$\beta^2=\frac{1}{\alpha^2}$

$1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=1+\beta+\beta^2=2\beta$

$(\because\ \beta^2+1=\beta)$

해설

(별해1)

$1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha^2}=\frac{2}{\alpha}\ (\because\ \alpha^2-\alpha+1=0)$

$\alpha\beta=1$에서 $\beta=\frac{1}{\alpha}$

$\therefore\ \frac{2}{\alpha}=2\beta$

(별해2)

$x^2-x+1=0$의 근은 $\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\alpha=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $\beta=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$라 하면

$\frac{2}{\alpha}=\frac{2}{\frac{1+\sqrt{3}i}{2}}=1-\sqrt{3}i=2\beta$

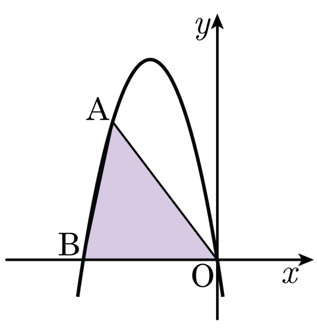
23. a, b, c는 실수이고, $a > 0, ac - b^2 > 0, b \neq 0$이라 할 때, x의 이차방정식 $x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① 서로 다른 두 개의 음의 근
② 서로 다른 두 개의 양의 근
③ 양의 중근
④ 음의 중근
⑤ 서로 다른 두 허근

해설

$x^2 - (a+c)x + ac - b^2 = 0$의 판별식을 D라 하면
$D = (a+c)^2 - 4(ac - b^2)$
$\quad = (a-c)^2 + 4b^2 > 0 \cdots$ ㉠ ($\because\ b \neq 0$)
$a > 0,\ ac > b^2 > 0$에서 $c > 0$이므로
(두 근의 곱)$= ac - b^2 > 0 \cdots$ ㉡
(두 근의 합)$= a + c > 0 \cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 주어진 방정식은 서로 다른 두 개의 양의 근을 가진다.

24. 다음 그림은 축의 방정식이 $x=-3$ 인 이차함수 $y=-x^2+bx+c$ 의 그래프이다. 점 O (원점), B 는 x 축과 만나는 점이고, 점 A 가 O 에서 B 까지 포물선을 따라 움직일 때, $\triangle$OAB 의 넓이의 최댓값은?



① 18 ② 27 ③ 36 ④ 45 ⑤ 54

해설

축이 $x=-3$ 이므로 B 의 좌표는$(-6,\ 0)$ 이다.
따라서 $y=-x^2+bx+c$ 가 두 점
$(0,\ 0)$, $(-6,\ 0)$ 을 지나므로,
$0=c,\ 0=-36-6b$
$b=-6,\ c=0$
$y=-x^2-6x=-(x+3)^2+9$
$\triangle$OAB 에서 밑변의 길이를 $\overline{\text{OB}}$ 라고 하면, 높이가 최대일 때 $\triangle$OAB 의 넓이가 최대가 된다.
즉, A 가 꼭짓점에 있을 때이다. 꼭짓점의 좌표가 $(-3,\ 9)$ 이므로
$\triangle$OAB 의 넓이$=\frac{1}{2}\times\overline{\text{OB}}\times 9=\frac{1}{2}\times 6\times 9=27$

25. 방정식 $x^2+2y^2-2xy+2x-6y+5=0$ 을 만족하는 실수 $x,\ y$ 에 대하여 $\frac{y}{x}$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

주어진 식을 x 에 대하여 정리하면
$x^2+2(1-y)x+2y^2-6y+5=0$ ⋯⋯ ㉠
이 때, x 가 실수이므로
$\frac{D}{4}=(1-y)^2-(2y^2-6y+5)\geq 0$
$y^2-4y+4\leq 0,\ (y-2)^2\leq 0$
여기서 y 가 실수이므로 $(y-2)^2=0$
$\therefore\ y=2$ ⋯⋯ ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2-2x+1=0$
$\therefore\ x=1\ \ \therefore\ \frac{y}{x}=\frac{2}{1}=2$

해설

주어진 식을 정리하면
$x^2+2(1-y)x+2y^2-6y+5=0$
$x^2+2(1-y)x+(1-y)^2+y^2-4y+4=0$
$\therefore\ (x+1-y)^2+(y-2)^2=0$ $x,\ y$ 가 실수이므로 $x+1-y=0,\ y-2=0$
$\therefore\ x=1,\ y=2$
$\therefore\ \frac{y}{x}=2$

26. $x+y=2,\ x^3+y^3=14$ 일 때, x^5+y^5 의 값을 구하면?

① 12　② 32　③ 52　④ 82　⑤ 102

해설

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)\cdots(*)$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\therefore\ 14=8-6xy$

$\therefore\ xy=-1\cdots\cdots$①

$x^3+y^3=14\cdots\cdots$②

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4-2(-1)=6\cdots\cdots$③

①, ②, ③을 $(*)$ 에 대입하면

$x^5+y^5=6\times14-2=82$

27. 다항식 $f(x)$를 $\left(x-\frac{2}{3}\right)$로 나눌때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라고 할 때, 다음 중 $f(x)$를 $3x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지는?

① $Q(x)$, R　② $3Q(x)$, R　③ $Q(x)$, $3R$
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R　⑤ $Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$$f(x)=\left(x-\frac{2}{3}\right)Q(x)+R$$
$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R$$
$$=(3x-2)\frac{1}{3}Q(x)+R$$

이므로 구하는 몫과 나머지는

몫: $\frac{1}{3}Q(x)$ 나머지: R

28. x^3 의 항의 계수가 1 인 삼차 다항식 $P(x)$ 가 $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ 을 만족할 때, $P(4)$ 의 값은?

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

해설

인수정리에 의해
$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$
$P(4) = 3 \times 2 \times 1 = 6$

29. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α,β라 한다. $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$일 때, $a-b$의 값을 구하시오.

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x^2-2x-1=0$의 두 근이 α,β이므로 근과계수와의 관계로부터

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

2와 -1을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2-(2-1)x+2\cdot(-1)=0$

$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x^2+ax+b=0$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

30. 포물선 $y = x^2 - 7x + 10$ 이 직선 $y = 2x + k$ 에 의하여 잘려지는 선분의 길이가 5 일 때 상수 k 의 값은?

① -9　　② -6　　③ 0　　④ 6　　⑤ 9

해설

$x^2 - 7x^2 + 10 = 2x + k$ 에서

$x^2 - 9x + (10 - k) = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$\alpha + \beta = 9, \alpha\beta = 10 - k$

교점 $\mathrm{A}(\alpha, 2\alpha + \mathrm{k}), \mathrm{B}(\beta, 2\beta + \mathrm{k})$

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 &= (\alpha - \beta)^2 + (2\alpha + k - 2\beta - k)^2 = 5(\alpha - \beta)^2 \\ &= 5\left\{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta\right\} = 5(4k + 41) \\ &= 5^2\end{aligned}$$

$\therefore k = -9$

31. 다음 이차함수의 최댓값 또는 최솟값이 옳게 짝지어진 것은?

① $y=\frac{1}{2}x^2+x-1 \Rightarrow x=-1$ 일 때, 최댓값 $-\frac{3}{2}$

② $y=-\frac{1}{2}x^2-x-2 \Rightarrow x=-1$ 일 때, 최솟값 $-\frac{2}{3}$

③ $y=-3x^2+2x-1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ 일 때, 최댓값 $-\frac{2}{3}$

④ $y=2x^2+12x \Rightarrow x=3$ 일 때, 최댓값 -3

⑤ $y=-x^2+5x-5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $-\frac{5}{4}$

해설

① $y=\frac{1}{2}x^2+x-1=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x=-1$ 일 때, 최솟값 $-\frac{3}{2}$

② $y=-\frac{1}{2}x^2-x-2=-\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{3}{2}$

$\Rightarrow x=-1$ 일 때, 최댓값 $-\frac{3}{2}$

④ $y=2x^2+12x=2(x+3)^2-18$

$\Rightarrow x=-3$ 일 때, 최솟값 -18

⑤ $y=-x^2+5x-5=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$

$\Rightarrow x=\frac{5}{2}$ 일 때, 최댓값 $\frac{5}{4}$

32. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 1$ 의 최소값이 -8 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{9}{4}$

해설

$f(x) = x^2 + 2ax + 1 = (x+a)^2 + 1 - a^2$ 에서 꼭지점의 x 좌표는 $-a$ 이다.

(ⅰ) $-a < -1$, 즉 $a > 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-1) = 2 - 2a = -8$
$\therefore\ a = 5$

(ⅱ) $-1 \le -a < 2$, 즉 $-2 < a \le 1$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(-a) = 1 - a^2 = -8,\ a^2 = 9$
$\therefore\ a = \pm 3$
$-2 < a \le 1$ 이므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(ⅲ) $-a \ge 2$, 즉 $a \le -2$ 일 때, $-1 \le x \le 2$ 에서
$f(x)$ 의 최솟값은 $f(2) = 5 + 4a = -8$
$\therefore\ a = -\frac{13}{4}$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $5 + \left(-\frac{13}{4}\right) = \frac{7}{4}$