

1. $\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}$ 가 x 에 대한 항등식일 때, 상수 $a^2 + b^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 5

해설

$$\frac{x+1}{x(x-1)} = \frac{(a+b)x-a}{x(x-1)}$$

따라서, $a+b=1$, $a=-1$

$\therefore a=-1$, $b=2$

$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + 2^2 = 5$

2. 다음 식을 간단히 하면?

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$$

- ① 1
- ② x
- ③ $\frac{1}{x}$
- ④ $\frac{1}{1-x}$
- ⑤ $-x$

해설

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}} &= 1 - \frac{1}{1 - \frac{x}{x-1}} \\ &= 1 - \frac{x-1}{x-1-x} \\ &= 1 + x - 1 = x \end{aligned}$$

3. $x : y = 3 : 4$ 일 때, $\frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy}$ 의 값을 구하면 $\frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 정수) 이다. 이때, $m + n$ 의 값을 구하면?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

$x : y = 3 : 4$ 일 때, $x = \frac{3}{4}y$ 이므로

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy} = \frac{\frac{9}{16}y^2 - y^2}{\frac{9}{16}y^2 - \frac{3}{4}y^2} = \frac{7}{3}$$

$\therefore m = 3, n = 7$

4. $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{13 \times 14} = \frac{a}{14}$ 에서 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\begin{aligned} \text{준식} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdots - \frac{1}{14} = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14} \\ \therefore a &= 13 \end{aligned}$$

5. $x = 1$ 일 때,
 $\frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)}$ 의 값
을 구하면?

- ① $\frac{8}{11}$ ② $\frac{10}{11}$ ③ $\frac{12}{11}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{10}{9}$

해설

이항분리 이용

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x(x+1)} + \frac{2}{(x+1)(x+3)} + \frac{3}{(x+3)(x+6)} + \frac{4}{(x+6)(x+10)} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) \\ & \quad + \frac{3}{3} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+6} \right) + \frac{4}{4} \left(\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+10} \right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+10} \end{aligned}$$

$$x = 1 \text{ 대입하면 } \frac{1}{1} - \frac{1}{1+10} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

6. $\frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} = a + \frac{b}{x-1}$ 이라 할 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

좌변을 정리하여 우변과 비교한다.

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}} &= \frac{\frac{x-1+1}{x-1}}{\frac{x+1-1}{x+1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x+1}} \\ &= \frac{x(x+1)}{x(x-1)} = \frac{x+1}{x-1} \end{aligned}$$

$$a + \frac{b}{x-1} = \frac{ax-a+b}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1} = \frac{ax-a+b}{x-1}$$

$$\therefore a = 1, b = 2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

7. 등식 $\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}$ 을 만족시키는 세 자연수 a, b, c 에 대하여

$a^2 + b^2 + c^2$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$$\frac{4}{11} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}} \text{ 에서}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{11}{4} = 2 + \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

$$a = 2 \text{ 이고 } \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{이 때, } b + \frac{1}{c} = \frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{3} \text{ 이므로 } b = 1, c = 3$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2^2 + 1^2 + 3^2 = 14$$

8. 유리수 $\frac{87}{19} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \frac{1}{e + \frac{1}{2}}}}}$ 로 나타낼 때, $a + b + c + d + e$

의 값을 구하면?

- ① 7
- ② 8
- ③ 9
- ④ 10
- ⑤ 11

해설

$$\frac{87}{19} = 4 + \frac{11}{19} = 4 + \frac{1}{\frac{19}{11}}$$

$$= 4 + \frac{1}{1 + \frac{8}{11}}$$

$$\frac{8}{11} = \frac{1}{\frac{11}{8}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{8}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{8}{3}}}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

$\therefore a = 4, b = 1, c = 1, d = 2, e = 1$
따라서 $a + b + c + d + e = 9$

9. $x + y - z = 2x + 3y - 2z = -x - 2y + 2z$ 일 때,
 $\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right) : \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right)$ 를 가장 간단한 정수비로 나타내면?

- ① 3 : 2 : 5
- ② 3 : 5 : -5
- ③ 2 : 3 : 5
- ④ 3 : 5 : 2
- ⑤ 2 : 3 : -2

해설

$x + y - z = 2x + 3y - 2z$ 에서 $x + 2y = z \dots\dots\textcircled{A}$
 $x + y - z = -x - 2y + 2z$ 에서 $2x + 3y = 3z \dots\textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서 $y = -z, x = 3z$
 $\left(\frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right) : \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right)$
 $= \left(-\frac{1}{z} + \frac{2}{z}\right) : \left(\frac{1}{z} + \frac{2}{3z}\right) : \left(\frac{1}{3z} - \frac{2}{z}\right)$
 $= \left(\frac{1}{z}\right) : \left(\frac{5}{3z}\right) : \left(-\frac{5}{3z}\right)$
 $= 3 : 5 : -5$

10. $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$ 일 때, $\frac{5x^2 - xy + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$ 의 값은?

- ① $\frac{5}{7}$
- ② $\frac{7}{5}$
- ③ $\frac{3}{7}$
- ④ $\frac{7}{3}$
- ⑤ 1

해설

$2x - y + z = 0 \cdots \textcircled{1}$

$x - 2y + 3z = 0 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ 에서 정리하면

$y = \frac{5}{3}z$

$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}$ 에서 정리하면

$x = \frac{1}{3}z$

$\therefore x : y : z = \frac{1}{3}z : \frac{5}{3}z : z$

$= 1 : 5 : 3$

$x = 1, y = 5, z = 3$ 을 대입하면

$(\text{준식}) = \frac{5 - 5 + 25}{1 + 25 + 9} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$

11. $a+b = \frac{b+c}{2} = \frac{c+a}{3}$ 일 때, $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$ 의 값은? (단, $a^2+b^2+c^2 \neq 0$)

- ① $\frac{5}{6}$
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ $\frac{2}{5}$
- ④ $\frac{7}{2}$
- ⑤ 3

해설

$a+b = \frac{b+c}{2} = \frac{c+a}{3} = k$ 라 두면
 $a+b = k, b+c = 2k, c+a = 3k$
 $a+b+c = 3k$
 $a = k, b = 0, c = 2k$
 $\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} = \frac{2k^2}{5k^2} = \frac{2}{5}$

12. $x + y = \frac{y + z}{2} = \frac{z + x}{5}$ 일 때, $\frac{7(x^2 + y^2 - z^2)}{xy - yz + zx}$ 의 값은?

- ① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

$$x + y = \frac{y + z}{2} = \frac{z + x}{5} = k$$

$$x + y = k \cdots \textcircled{1}$$

$$y + z = 2k \cdots \textcircled{2}$$

$$z + x = 5k \cdots \textcircled{3}$$

$$\text{세식을 더해 정리하면 } x + y + z = 4k \cdots \textcircled{4}$$

④에서 ①, ②, ③을 각각 빼면

$$x = 2k, y = -k, z = 3k$$

$$\therefore \frac{7(x^2 + y^2 - z^2)}{xy - yz + zx} = \frac{7(4k^2 + k^2 - 9k^2)}{-2k^2 + 3k^2 + 6k^2} = -4$$

13. 유리식 $\frac{3c}{a+2b} = \frac{a}{2b+3c} = \frac{2b}{3c+a}$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$

② 2

③ -1

④ $-1, \frac{1}{2}$

⑤ -1, 2

해설

$$\frac{3c}{a+2b} = \frac{a}{2b+3c} = \frac{2b}{3c+a} = k$$

$$\begin{cases} (a+2b)k = 3c \cdots ① \\ (2b+3c)k = a \cdots ② \\ (3c+a)k = 2b \cdots ③ \end{cases}$$

① + ② + ③ : $2(a+2b+3c)k = (a+2b+3c)$

i) $(a+2b+3c) \neq 0, 2k = 1$

$\therefore k = \frac{1}{2}$

ii) $(a+2b+3c) = 0$

$a+2b = -3c \rightarrow$ ① 식에 대입

$-3c \cdot k = 3c$

$\therefore k = -1$

$\therefore k = -1, \frac{1}{2}$

14. 어떤 시험에서 수험생의 남녀 비율은 6 : 5, 합격생의 남녀 비율은 7 : 6, 불합격생의 남녀 비율은 3 : 2이다. 남자의 합격률을 p , 여자의 합격률을 q 라고 할 때, pq 의 값은?

- ① $\frac{39}{80}$ ② $\frac{42}{80}$ ③ $\frac{45}{80}$ ④ $\frac{53}{80}$ ⑤ $\frac{63}{80}$

해설

수험생의 남녀의 수를 $6a$, $5a$, 합격생의 남녀의 수를 $7b$, $6b$
불합격생의 남녀의 수를 $3c$, $2c$ 로 놓으면

$$6a = 7b + 3c \cdots ①$$

$$5a = 6b + 2c \cdots ②$$

① $\times 2 -$ ② $\times 3$ 을 정리하면

$$-3a = -4b$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore p = \frac{7b}{6a} = \frac{7}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{8}, q = \frac{6b}{5a} = \frac{6}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{10}$$

$$\therefore pq = \frac{7}{8} \times \frac{9}{10} = \frac{63}{80}$$

15. 수질오염의 정도를 수치로 나타내는 한 방법으로 생물학적 지표가 사용된다. 이 지표는 유색생물의 수가 X , 무색생물의 수가 Y 일 때, $\frac{Y}{X+Y} \times 100(\%)$ 로 정의된다. 지난 달 수질검사에서 어떤 호수의 생물학적 지표는 10(%)이었다. 이번 달에 이 호수의 수질을 검사한 결과, 지난 달에 비해 유색생물의 수는 2배, 무색생물의 수는 3배가 되었다. 이번 달 이 호수의 생물학적 지표는 몇 퍼센트(%) 인가?
- ① 약 14.3% ② 약 15.2% ③ 약 16.4%
- ④ 약 17.1% ⑤ 약 18.5%

해설

지난 달 유색 생물의 수를 X , 무색 생물의 수를 Y 라 하면 $\frac{Y}{X+Y} \times 100 = 10$
따라서, $\frac{Y}{X+Y} = \frac{1}{10}$ 에서 $X = 9Y$
한편, 이번 달의 유색 생물의 수는 $2X$, 무색 생물의 수는 $3Y$
이므로 이번 달의 생물학적 지표는

$$\frac{3Y}{2X+3Y} \times 100 = \frac{3Y}{2 \cdot 9Y + 3Y} \times 100$$
$$= \frac{1}{7} \times 100 \approx 14.3(\%)$$

16. K 고등학교 1학년 남학생과 여학생 수가 같다고 한다. 1학년 학생 중에서 휴대폰을 갖고 있는 학생과 휴대폰을 갖고 있지 않은 학생의 비율이 1학년 전체로는 9 : 1 이고, 남학생 중에서는 6 : 1 이라고 한다면 여학생 중에서의 비율은?

① 13 : 1 ② 17 : 2 ③ 22 : 3 ④ 31 : 1 ⑤ 33 : 2

해설

전체학생수를 $10a$ 라 하면

(휴대폰 있는 학생수) = $9a$, (휴대폰 없는 학생수) = a

남학생수 : $5a$, 여학생수 $5a$

남학생 중 휴대폰 있는 학생수 : $5a \times \frac{6}{7}$

여학생 중 휴대폰 있는 학생수 : $9a - \frac{30a}{7} = \frac{33}{7}a$

여학생 중 휴대폰 없는 학생 수 : $5a - \frac{33}{7}a = \frac{2}{7}a$

$\therefore \frac{33}{7}a : \frac{2}{7}a = 33 : 2$

17. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + m, y + n)$ 에 의하여 분수함수 $y = \frac{x+1}{x}$ 의 그래프가 분수함수 $y = \frac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프로 옮겨질 때, $m - n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

분수함수 $y = \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} + 1$ 의 그래프를

x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \frac{1}{x-m} + 1 + n$ 이 식이

$y = \frac{-x+3}{x-2} = \frac{-(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1$ 과 같으므로

$m = 2, 1 + n = -1$ 에서 $n = -2$

$\therefore m - n = 4$

18. 함수 $y = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$ 을 지나고, 점근선의 방정식이 $x = 2, y = 1$ 일 때, abc 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

점근선이 $x = 2, y = 1$ 이므로

$$y = \frac{k}{x-2} + 1 \cdots \textcircled{1}$$

①이 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -k + 1 \therefore k = 1$$

$$y = \frac{1+x-2}{x-2} = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\therefore a = 1, b = -1, c = -2$$

따라서 $abc = 2$

19. x, y, z 는 양수일 때, 다음 식을 간단히 하면?

$$\frac{(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1})\{ (xy)^{-1} + (yz)^{-1} + (zx)^{-1} \}}{(x + y + z)(xy + yz + zx)}$$

- ① $x^{-2}y^{-2}z^{-2}$

② $x^{-2} + y^{-2} + z^{-2}$

③ $(x + y + z)^{-2}$

④ $\frac{1}{xyz}$

⑤ $\frac{1}{xy + yz + zx}$

해설

$$\begin{aligned} &\frac{1}{x + y + z} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \left(\frac{1}{xy + yz + zx} \right) \\ &\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) \\ &= \frac{1}{x + y + z} \left(\frac{xy + yz + zx}{xyz} \right) \left(\frac{1}{xy + yz + zx} \right) \\ &\left(\frac{x + y + z}{xyz} \right) \\ &= \left(\frac{1}{xyz} \right)^2 = x^{-2}y^{-2}z^{-2} \end{aligned}$$

20. 함수 $y = \frac{2x+5}{x+1}$ 의 그래프가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a - b$ 의 값은? (단, $a < 0$)

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$y = \frac{2x+5}{x+1} = \frac{2(x+1)+3}{x+1} = \frac{3}{x+1} + 2$$

이므로

주어진 함수의 그래프는 점 $(-1, 2)$ 를 지나고

고

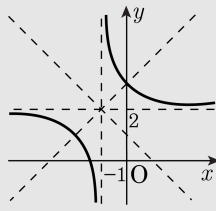
기울기가 ± 1 인 직선에 대하여 대칭이다.

이 때, 구하는 직선의 기울기가 음수이므로

직선의 방정식은 $y - 2 = -(x + 1)$

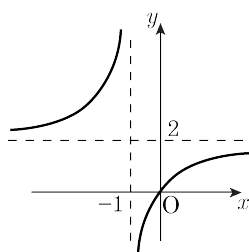
$\therefore y = -x + 1$

따라서 $a = -1$, $b = 1$ 이므로 $a - b = -2$



21. 함수 $y = \frac{cx+b}{x+a}$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

점근선이 $x = -1, y = 2$ 이므로 $y = 2 + \frac{k}{x+1}$, ($k \neq 0$)

점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $k = -2$

따라서 $y = 2 + \frac{-2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$

$\therefore a = 1, b = 0, c = 2$

$\therefore a + b + c = 3$

22. 함수 $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 한다. $y = g(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프가 만나는 점을 A, B 라 할 때 선분 AB 의 길이는?

- ① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{3}$

해설

$y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 는 $y = x$ 에 대해 대칭이므로 $\begin{cases} y = g(x) \\ y = x \end{cases}$

의 교점은 $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \end{cases}$ 의 교점과 같다.

$$\frac{x+2}{x-1} = x, \quad x+2 = x^2 - x$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0, \quad x = 1 \pm \sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$A(1 + \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}), B(1 - \sqrt{3}, 1 - \sqrt{3})$$

$$\therefore AB = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$

23. a, b, c 가 실수일 때, $a + b = 4ab$, $b + c = 10bc$, $c + a = 6ca$ 이 성립한다. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$$a + b = 4ab \text{에서 } \frac{a+b}{ab} = 4, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 4$$

$$\text{같은 방법으로 } \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 10, \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = 6$$

$$\therefore 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 20$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 10$$

24. 양수 a, b, c, d 는 $a : b = c : d$ 가 성립한다. 다음 중에서 옳은 것을 모두 고르면?

- ① $ad = bc$
② $ab : cd = \frac{b}{a} : \frac{d}{c}$
③ $a : (a + b) = c : (c + d)$
④ $(a + 2) : b = (c + 2) : d$
⑤ $(a + b) : (c + d) = (2a + b) : (2c + d)$

해설

$a : b = c : d$ 에서 $c = ka, d = kb$ 라 놓자.

① $ad = a \cdot kb = kab, bc = b \cdot ka = kab$
 $\therefore ad = bc$

② $ab : cd = ab : k^2 ab = 1 : k^2$
 $\frac{b}{a} : \frac{d}{c} = \frac{b}{a} : \frac{kb}{ka} = \frac{b}{a} : \frac{b}{a} = 1 : 1$
 $\therefore ab : cd \neq \frac{b}{a} : \frac{d}{c}$

③ $a : (a + b) = c : (c + d) = ka : k(a + b) = a : a + b$
 $\therefore a : (a + b) = c : (c + d)$

④ $(a + 2) : b = (c + 2) : d = (ka + 2) : kb$
 $\therefore (a + 2) : b \neq (c + 2) : d$

⑤ $(a + b) : (c + d)$
 $= (a + b) : (ka + kb) = 1 : k, (2a + b) : (2c + d)$
 $= (2a + b) : (2ka + kb) = 1 : k$
 $\therefore (a + b) : (c + d) = (2a + b) : (2c + d)$

25. 함수 $y = \frac{|x+1|}{x-1}$ 의 치역이 $\{y \mid y \leq p \text{ 또는 } q < y\}$ 일 때, $p+q$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

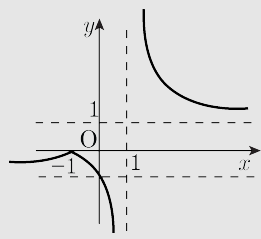
해설

i) $x < -1$

$$y = \frac{-x-1}{x-1} = -1 + \frac{-2}{x-1}$$

ii) $x \geq -1$

$$y = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$$



$\{y \mid y \leq p \text{ 또는 } q < y\}$ 이므로

$p=0, q=1 \therefore p+q=1$