

1. 서로소인 두 자연수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{b}{a}}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

따라서 $a + b = 13$ 이다.

2. 다음 중 세 수 $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$ 을 작은 수부터 차례로 나열한 것은?

① $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$

② $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[6]{30}$

③ $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$, $\sqrt[4]{10}$

④ $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[3]{6}$

⑤ $\sqrt[4]{10}$, $\sqrt[6]{30}$, $\sqrt[3]{6}$

해설

거듭제곱의 성질을 이용하여 $\sqrt[12]{N}$ 의 꼴로 나타내면

$$\sqrt[3]{6} = \sqrt[12]{6^4}$$

$$\sqrt[4]{10} = \sqrt[12]{10^3}$$

$$\sqrt[6]{30} = \sqrt[12]{30^2}$$

그런데

$$\frac{6^4}{10^3} = \frac{(2 \times 3)^4}{(2 \times 5)^3} = \frac{2 \times 3^4}{5^3} > 1,$$

$$\frac{10^3}{30^2} = \frac{10}{9} > 1 \text{ 이므로}$$

$$6^4 > 10^3 > 30^2$$

따라서 작은 수부터 나열하면

$$\sqrt[6]{30}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[3]{6}$$

3. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 일 때, $a + a^{-1}$ 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 4$ 의 양변을 제곱하면 $\left(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = 4^2$

$$a + a^{-1} + 2 = 16$$

$$\therefore a + a^{-1} = 14$$

4. $3^x = 5$ 일 때, $(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}}$ 의 값을 구하면?

① 3

② $\sqrt{3}$

③ 5

④ $\sqrt{5}$

⑤ $\frac{1}{5}$

해설

$$(\frac{1}{81})^{-\frac{x}{4}} = (3^{-4})^{-\frac{x}{4}} = 3^x = 5$$

5. $\log_{10}(1+1) + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \log_{10}\left(1 + \frac{1}{99}\right)$
의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \log_{10} 2 + \log_{10} \frac{3}{2} + \log_{10} \frac{4}{3} + \cdots + \log_{10} \frac{100}{99} \\&= \log_{10} \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{100}{99} \right) \\&= \log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2 \log_{10} 10 = 2\end{aligned}$$

6. $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ 을 간단히 하면 $a^{\frac{n}{m}}$ 이다. 이때, $m-n$ 의 값을 구하여라.
(단, m, n 은 서로소인 자연수)

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

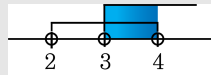
$$\begin{aligned}\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} &= \sqrt{a\sqrt{a^{\frac{3}{2}}}} \\ &= \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}} \\ &= (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}} \\ n &= 7, m = 8 \\ 8 - 7 &= 1\end{aligned}$$

7. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$ 이 정의되기 위한 실수 x 의 값의 범위를 구하면?

- ① $3 < x < 4$ ② $5 < x < 7$ ③ $-1 < x < 3$
④ $x > 0$ ⑤ $2 < x < 5$

해설

$x-3 \neq 1, x-3 > 0,$
 $-x^2+6x-8 > 0$ 이므로
 $x \neq 4, x > 3$
 $x^2-6x+8 < 0$
 $2 < x < 4$



$\therefore 3 < x < 4$

8. $\log_a 27 = -2, \log_{\sqrt{3}} b = 3$ 일때, ab 의 값은?

- ① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

해설

$$\log_a 27 = -2 \text{에서 } a^{-2} = 27 = 3^3$$

$$\therefore a = 3^{-\frac{3}{2}} (\because a > 0)$$

$$\log_{\sqrt{3}} b = 3 \text{에서 } b = (\sqrt{3})^3 = (3^{\frac{1}{2}})^3 = 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore ab = 3^{-\frac{3}{2}} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 3^{-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = 3^0 = 1$$

9. $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$ 라고 할 때, $\log_8 125$ 를 a , b 로 나타내면?

① $1 - 2b$

② $2b - a$

③ $a - b$

④ $\frac{b}{a}$

⑤ $\frac{a}{b}$

해설

$$\log_3 2 = a \quad \log_3 5 = b$$

$$\log_8 125 = \log_{2^3} 5^3 = \log_2 5$$

$$= \frac{\log_3 5}{\log_3 2} = \frac{b}{a}$$

10. 세 수 $3\log_3 3$, $\log_2 3$, $2\log_2 4$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

- ① $2\log_2 4 < 3\log_3 3 < \log_2 3$ ② $\log_2 3 < 2\log_2 4 < 3\log_3 3$
③ $\log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4$ ④ $3\log_3 3 < 2\log_2 4 < \log_2 3$
⑤ $3\log_3 3 < \log_2 3 < 2\log_2 4$

해설

$$\begin{aligned} 3\log_3 3 &= 3 \\ \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 &\quad \therefore 1 < \log_2 3 < 2 \\ 2\log_2 4 &= 4 \\ \therefore \log_2 3 < 3\log_3 3 < 2\log_2 4 \end{aligned}$$

11. 상용로그 $\log 6.3$ 은 0.80 이고, $a = \log 6300$, $\log b = -1.20$ 일 때, $a + 10b$ 의 값은?

① 3.80 ② 4.04 ③ 4.28 ④ 4.32 ⑤ 4.43

해설

$a = \log 6300 = \log(1000 \times 6.3) = 3 + \log 6.3 = 3.80$ 이고
 $\log b = -1.20 = -2 + 0.80 = \log 0.01 + \log 6.3$
 $= \log 0.063$ 이므로 $b = 0.063$
 $\therefore a + 10b = 3.80 + 0.63 = 4.43$

12. $\log(31.4 \times A) = 1.0471$ 일 때, 양수 A 의 값을 다음 상용로그표를 이용하여 구한 것은?

수	0	1	2	3	4	5
3.0	.4771	.4786	.4800	.4814	.4829	.4843
3.1	.4914	.4928	.4942	.4955	.4969	.4983
3.2	.5051	.5065	.5079	.5092	.5105	.5119
3.3	.5185	.5198	.5211	.5224	.5326	.5250
3.4	.5315	.5328	.5340	.5353	.5366	.5378
3.5	.5441	.5435	.5465	.5478	.5490	.5502

- ① 0.3020
- ② 0.355
- ③ 1.35

- ④ 2.30
- ⑤ 2.33

해설

$\log(31.4 \times A) = 1.0471$ 에서
 $\log 31.4 + \log A = 1.0471$
 $\log A = 1.0471 - \log 31.4$
 $= 1.0471 - (1 + \log 3.14)$
 $= 1.0471 - (1 + 0.4969)(\because \text{로그표에서 } \log 3.14 = 0.4969)$
 $= -0.4498$
 $= -1 + 0.5502$
그런데 주어진 로그표에서 $\log 3.55 = 0.5502$ 이므로 $A = 0.355$ 이다.

13. $\lfloor \log 1 \rfloor + \lfloor \log 2 \rfloor + \lfloor \log 3 \rfloor + \cdots + \lfloor \log 20 \rfloor$ 의 값은? (단, $\lfloor x \rfloor$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수)

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$1 \leq k < 10$ 일 때, $\lfloor \log_{10} k \rfloor = 0$

$10 \leq k < 100$ 일 때, $\lfloor \log_{10} k \rfloor = 1$

$\therefore 0 \times 9 + 1 \times 11 = 11$

14. 지진이 발생할 때, 지진의 세기를 진도라 하며 보통 리히터수로 나타낸다. 지질학자 C.F.Richer는 강도가 I 인 지진의 진도 R 을 다음과 같이 정의하였다.

$R = \log \frac{I}{I_0}$ (단, I_0 는 표준지진의 강도)

리히터수로 진도 6.8인 지진의 강도는 리히터 수로 진도 4.8인 지진의 강도의 몇배인가?

- ① 1.4배
- ② 2배
- ③ $\sqrt{10}$ 배
- ④ 10배
- ⑤ 100배

해설

진도가 4.8, 6.8일 때의 지진의 강도를 각각 I_1, I_2 라 하면

$4.8 = \log \frac{I_1}{I_0}, 6.8 = \log \frac{I_2}{I_0}$ 이므로

$\therefore \log \frac{I_2}{I_1} = \frac{10^{6.8}}{10^{4.8}} = 100(\text{배})$

15. $(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^k$ 일 때, k 의 값을 구하여라. (단, $a > 0, a \neq 1$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}} \div a^3 \times (\sqrt[3]{a})^6 = a^6 \div a^3 \times a^2 = a^5$ 이므로
 $k = 5$

16. $3^{2\log_3 4 - 3\log_3 2}$ 을 간단히 하면?

① $\log_3 2$

② 1

③ $2\log_3 2$

④ $\log_2 3$

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} 3^{2\log_3 4 - 3\log_3 2} &= 3^{\log_3 16 - \log_3 8} \\ &= 3^{\log_3 2} \\ &= 2^{\log_3 3} = 2 \end{aligned}$$

17. $\log_2 x = \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{2}} y = 2$ 일 때, $\log_x y$ 의 값은?

- ① -4 ② -1 ③ $\frac{1}{4}$ ④ 1 ⑤ 4

해설

$$\log_{\frac{1}{2}} y = -\log_2 y = 2 \text{ 이므로}$$

$$\log_x y = \frac{\log_2 y}{\log_2 x} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$$

18. $3^a = 2$, $3^b = 7$ 일 때, $\log_6 84$ 를 a , b 로 나타내면?

- ① $\frac{2a+b+1}{a+1}$ ② $\frac{a+2b+1}{b+1}$ ③ ab
④ $\frac{2a+b-1}{a+1}$ ⑤ $\frac{2a+b-1}{b+1}$

해설

$3^a = 2$ 이므로 $a = \log_3 2$, $3^b = 7$ 이므로 $b = \log_3 7$

$$\therefore \log_6 84 = \frac{\log_3 84}{\log_3 6} = \frac{\log_3 (2^2 \times 3 \times 7)}{\log_3 (2 \times 3)}$$

$$= \frac{\log_3 2^2 + \log_3 3 + \log_3 7}{\log_3 2 + \log_3 3}$$

$$= \frac{2 \log_3 2 + 1 + \log_3 7}{\log_3 2 + 1} = \frac{2a + b + 1}{a + 1}$$

19. 데시벨(dB)은 소리의 세기를 표준음의 세기 10^{-12}W/m^2 와 비교해서 나타낸다. 소리의 세기 $x\text{W/m}^2$ 를 ydB로 나타내는 식은 다음과 같다.

$$y = 120 + 10 \log x$$

요란한 음악의 세기가 130dB 일 때, 이것은 표준음의 세기의 몇 배인가?

- ① 10^9 배

② 10^{10} 배

③ 10^{11} 배

④ 10^{12} 배

⑤ 10^{13} 배

해설

요란한 음악의 세기가 130dB 이므로 이 소리의 세기를 a 라 하면
 $130 = 120 + 10 \log a$
 $10 = 10 \log a$
 $1 = \log a$
 $\therefore a = 10$
따라서 표준음의 세기의 $\frac{10}{10^{-12}} = 10^{1-(-12)} = 10^{13}$ (배)

20. $a^{2x} = 5$ 일 때, $\frac{a^{3x} - a^{-x}}{a^{3x} + a^{-x}}$ 의 값은? (단, $a > 0$)

① $\frac{4}{9}$

② $\frac{6}{11}$

③ $\frac{9}{13}$

④ $\frac{11}{13}$

⑤ $\frac{12}{13}$

해설

$$\begin{aligned}\frac{a^{3x} - a^{-x}}{a^{3x} + a^{-x}} &= \frac{(a^{3x} - a^{-x}) \times a^x}{(a^{3x} + a^{-x}) \times a^x} \\ &= \frac{a^{4x} - 1}{a^{4x} + 1} = \frac{(a^{2x})^2 - 1}{(a^{2x})^2 + 1} \\ &= \frac{5^2 - 1}{5^2 + 1} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}\end{aligned}$$