1. x에 대한 이차방정식 $kx^2 + 2(k+1)x + k = 0$이 중근을 가질 때 k의 값은?

① $-\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ -1　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$\frac{D}{4} = b'^2 - ac = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$에서

중근을 가질 조건이므로

$\frac{D}{4} = 0$이어야 한다.

$2k+1 = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$

2. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a<1$ ② $a\ge 1$ ③ $-1<a<1$

④ $a>1$ ⑤ $a\ge -1$

해설

$x^2+2x+2-a=0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D>0$ 이어야 한다.
$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$
$1-2+a>0$
$\therefore\ a>1$

3. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

4. 이차식 $2x^2-4x+3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a=2, b'=-2, c=3$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

5. 계수가 유리수인 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ 의 한 근이 $2 + \sqrt{3}$ 일 때, ab 의 값은?

① -3　　② 0　　③ 2

④ 4　　⑤ $2 + 2\sqrt{3}$

해설

유리계수이므로 다른 한 근은 $2 - \sqrt{3}$
근과 계수와의 관계에 의해
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 2 + \sqrt{3}$ 대입
$(2 + \sqrt{3})^2 - a \cdot (2 + \sqrt{3}) + b = 0$
계수가 유리수이므로
$\sqrt{3} \cdot (4 - a) + (b - 2a + 7) = 0$
$a = 4, b = 1$
$\therefore ab = 4$

6. 다음 보기는 방정식 $(ax-1)a=x-1$의 해에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a=-1$ 이면 해가 없다.

㉡ $a=1$ 이면 오직 하나의 해를 갖는다.

㉢ $a \neq \pm 1$ 이 아니면 해는 무수히 많다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$(ax-1)a=x-1$ 에서
$(a^2-1)x=a-1$
$(a-1)(a+1)x=a-1$
㉠ $a=-1$ 이면 $0 \cdot x=-2$ 이므로 해가 없다.
㉡ $a=1$ 이면 $0 \cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.
㉢ $a \neq \pm 1$ 이면 $x=\dfrac{1}{a+1}$
따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

7. 이차방정식 $(\sqrt{2}-1)x^2-(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$의 두 근은?

① $\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$　② $-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}$　③ $\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$
④ $-\sqrt{2},\ -1-\sqrt{2}$　⑤ $\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}$

해설

양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면
$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$
$(x-\sqrt{2})\left\{x-(\sqrt{2}+1)\right\}=0$
$\therefore x=\sqrt{2},\ \sqrt{2}+1$

해설

$x^2-(2\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$로 고친 후 근의 공식을 이용하여 풀어도 좋다.

8. 이차방정식 $x^2-5x+p=0$의 두 근은 $3, \alpha$이고 $x^2-px+q=0$의 두 근은 α, β이다. 이 때 β의 값은?(단 p, q는 상수)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

이차방정식 $x^2-5x+p=0$에서
근과 계수의 관계에 의해
두 근의 합 : $3+\alpha=5 \quad \therefore\ \alpha=2$
두 근의 곱 : $3\cdot\alpha=p=3\cdot 2=6$
이차방정식 $x^2-6x+q=0$의 두 근이 $2, \beta$이므로
$2+\beta=6 \quad \therefore\ \beta=4$

9. 0 이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$가 성립할 때, <보기>의 방정식 중 항상 실근이 존재하는 것을 <u>모두</u> 고른 것은?

보 기

㉠ $x^2 + ax + b = 0$	㉡ $x^2 + bx + a = 0$
㉢ $ax^2 + x + b = 0$	㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉣ ③ ㉡, ㉢ ④ ㉡, ㉣ ⑤ ㉢, ㉣

해설

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{b}{a}}$ 이 만족하려면 $b > 0, a < 0$

㉠ $x^2 + ax + b = 0,\ D = a^2 - 4b$

$b \le \frac{a^2}{4}$ 일 때만 실근 존재

㉡ $x^2 + bx + a = 0$

$D = b^2 - 4a > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉢ $ax^2 + x + b = 0$

$D = 1 - 4ab > 0$ 항상 실근 존재 (○)

㉣ $bx^2 + ax + b = 0$

$D = a^2 - 4b^2,\ a^2 \ge 4b^2$ 일 때만 실근 존재

10. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\quad\cdots\cdots㉠$

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\ge 0$

$\therefore\ k\ge -\frac{25}{8}\quad\cdots\cdots㉡$

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\le k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

11. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}=a-1+\dfrac{3}{3a}=a+\dfrac{1}{a}-1$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$a-3+\dfrac{1}{a}=0 \quad \therefore\ a+\dfrac{1}{a}=3$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

12. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta},\ \beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 x의 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$과 같다. $a,\ b$의 값을 구하면?

① $a=3,\ b=-2$　　② $a=0,\ b=-\frac{1}{2}$

③ $a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{3}$　　④ $a=2,\ b=-\frac{1}{4}$

⑤ $a=1,\ b=\frac{1}{2}$

해설

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=-a\cdots\cdots$ ①

$\alpha\beta=b\cdots\cdots$ ②

$\alpha+\frac{1}{\beta},\ \beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$ 이므로

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=-a\cdots\cdots$ ③

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\times\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=b\cdots\cdots$ ④

③에서 $\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-a$

$\therefore\ -a+\frac{-a}{b}=-a\quad\therefore\ -\frac{a}{b}=0\quad\therefore\ a=0$

④에서 $\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=b,\ \ b+\frac{1}{b}+2=b,$

$\frac{1}{b}+2=0\quad\therefore\ b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=0,\ b=-\frac{1}{2}$

13. 이차방정식 $x^2-2x-4=0$의 두 근을 α, β라 할 때, 이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=3$, $f(\beta)=3$, $f(1)=-2$를 만족한다. 이차방정식 $f(x)=0$를 구하면?

① $x^2-2x-4=0$
② $x^2-4x-1=0$
③ $x^2-x-4=0$
④ $x^2-x+4=0$
⑤ $x^2-2x-1=0$

해설

$x^2-2x-4=0$의 두 근이 α, β이고
$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
$ax^2+bx+c=3$에서 $ax^2+bx+c-3=0$
$\therefore -\frac{b}{a}=\alpha+\beta=2$
또, $\frac{c-3}{a}=\alpha\beta=-4$
$f(1)=a+b+c=-2$이므로
$a=-b-c-2$, $b=-2a$에서
$b=-2(-b-c-2)=2b+2c+4$
$\therefore b+2c+4=0$
$c-3=-4a$에서
$c=-4(-b-c-2)+3=4b+4c+11$
연립하여 풀면 $c=-1$, $b=-2$, $a=1$
$\therefore f(x)=x^2-2x-1$

14. $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α,β라 하고, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$라 할 때, $g(\alpha)\cdot g(\beta)$의 값은?

① 1　② 3　③ 8　④ 11　⑤ 13

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=3,\ \ \alpha\beta=1$
또, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$
$=(x^2-3x+1)(x+2)+2x+1$
$\alpha,\ \beta$는 $x^2-3x+1=0$의 근이므로
$g(\alpha)=2\alpha+1,\ g(\beta)=2\beta+1$
$\therefore\ g(\alpha)g(\beta)=(2\alpha+1)(2\beta+1)$
$=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$
$=4+6+1=11$

15. 사차방정식 $x^4+(2k+1)x^2+k^2-5=0$이 서로 다른 두 개의 실근과 서로 다른 두 개의 허근을 갖도록 실수 k의 값을 정할 때, k의 최대 정수값 M과 k의 최소 정수값 m의 곱 $M \cdot m$을 구하면?

① -4　　② 2　　③ -2　　④ -6　　⑤ 1

해설

$x^2=t$로 놓으면 주어진 사차방정식은
$t^2+(2k+1)t+k^2-5=0 \cdots$ ①
사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면
방정식 ①이 서로 다른 부호의 실근을 가져야 하므로
두 근의 곱 : $k^2-5<0$
$\therefore\ -\sqrt{5}<k<\sqrt{5}\ \ (\sqrt{5} \fallingdotseq 2.236\cdots)$
$\therefore\ M=2,\ m=-2$
$\therefore\ M \cdot m=-4$