

1. 함수 $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ 에서 $f^{-1}(4)$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 7

⑤ 8

해설

$f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ 에서 $f^{-1}(4) = k$ 로 놓으면

$f(k) = 4$

$\sqrt{k-1} + 2 = 4, \sqrt{k-1} = 2$

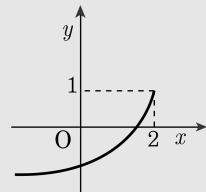
$k-1 = 4$ 에서 $k = 5$

$\therefore f^{-1}(4) = 5$

2. 좌표평면에서 무리함수 $y = -\sqrt{-x+2} + 1$ 의 그래프가 지나지 않는 사분면을 모두 구하면?
- ① 제 1사분면 ② 제 2사분면
③ 제 3사분면 ④ 제 1사분면, 제 2사분면
⑤ 제 3사분면, 제 4사분면

해설

무리함수의 그래프를 그려보면 아래와 같다.



따라서, 무리함수의 그래프가 지나지 않는 것은 제 2사분면이다.

3. 무리함수 $y = \sqrt{9+3x}-2$ 에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 고르면?

- ① 그래프는 x 축과 점 $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ 에서 만난다.
- ② 정의역은 $\{x|x \leq -3\}$ 이다.
- ③ 치역은 $\{y|y \geq -1\}$ 이다.
- ④ 그래프를 평행이동하면 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프와 겹칠 수 있다.
- ⑤ 제4 사분면을 지나지 않는다.

해설

① $y = \sqrt{9+3x}-2$ 에 $x = \frac{5}{3}$ 를 대입하면

$$y = \sqrt{14}-2$$

따라서, 점 $\left(\frac{5}{3}, \sqrt{14}-2\right)$ 를 지난다.

② $9+3x \geq 0$ 에서 $x \geq -3$

따라서, 정의역은 $\{x|x \geq -3\}$ 이다.

③ $\sqrt{9+3x} \geq 0$ 이므로 치역은

$\{y|y \geq -2\}$ 이다.

④ $y = \sqrt{9+3x}-2 = \sqrt{3(x+3)}-2$ 이므로

$y = \sqrt{3x}$ 의 그래프를

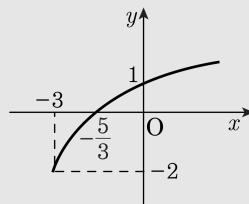
x 축의 방향으로 -3 만큼,

y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y = \sqrt{9+3x}-2$ 의 그래프는

그림과 같으므로

제4 사분면을 지나지 않는다.



4. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c (a > 0)$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \geq 1 \}$ 이고,
치역이 $\{ y \mid y \geq 2 \}$ 일 때, $\frac{2a^2 + c^2 - 2b}{2a}$ 의 최솟값을 구하면?

① $-\sqrt{2}$

② 1

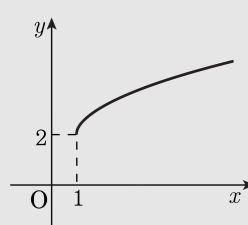
③ $2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{2} + 1$

⑤ $2\sqrt{2} + 2$

해설

정의역과 치역의 조건에 의하여 주어진 무리함수의 그래프는 다음과 같다.
즉 $y = \sqrt{a(x-1)} + 2$ 의 형태임을 알 수 있다.



$y = \sqrt{ax+b} + c$ 와 비교해보면 $b = -a, c = 2$ 이다.

$$\therefore \frac{2a^2 + c^2 - 2b}{2a} = \frac{2a^2 + 4 + 2a}{2a} = a + \frac{2}{a} + 1$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a + \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}$$

따라서 $a + \frac{2}{a} + 1 \geq 2\sqrt{2} + 1$ 이므로

최솟값은 $2\sqrt{2} + 1$ 이다.

5. 함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동 한 그래프와 곡선 $y = \frac{40}{x} (x > 0)$ 이 만나는 점의 x 좌표가 10일 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로
 2만큼 평행이동시키면
 $y = \sqrt{a(x-2)}$

이 그래프와 곡선 $y = \frac{40}{x}$ 이 만나는 점의
 x 좌표는 10이므로

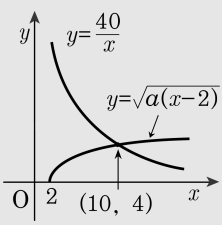
$$y\text{좌표는 } y = \frac{40}{10} = 4$$

즉 교점의 좌표는 (10, 4)

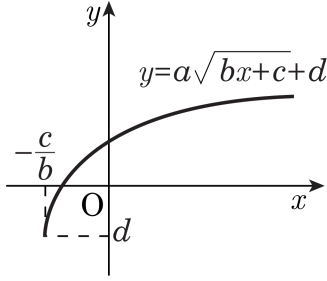
이것을 $y = \sqrt{a(x-2)}$ 대입하면

$$4 = \sqrt{a(10-2)} = \sqrt{8a}$$

$$\therefore a = 2$$



6. 함수 $y = a\sqrt{bx+c} + d$ 의 그래프의 개형이 그림과 같을 때, 함수 $y = d\sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프가 반드시 지나가는 사분면은?



- ① 제 1사분면

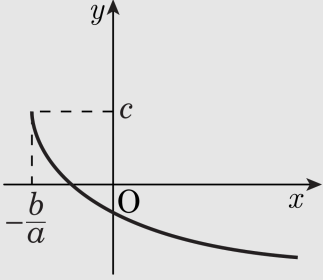
② 제 2사분면

③ 제 3사분면
- ④ 제 2, 4사분면

⑤ 제 3, 4사분면

해설

$\frac{-c}{b} < 0, d < 0, a > 0$



7. $-5 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $y = 2\sqrt{4-x} - 7$ 의 최댓값을 m , 최솟값을 n 라 할 때, $m+n$ 의 값은?

① -8

② -6

③ -4

④ -2

⑤ 0

해설

$$y = 2\sqrt{4-x} - 7 = 2\sqrt{-(x-4)} - 7$$

주어진 함수의 그래프는 $y = 2\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 -7만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$$x = -5 \text{ 일 때, 최댓값 } m = 2\sqrt{4-(-5)} - 7 = -1$$

$$x = 3 \text{ 일 때, 최솟값 } n = 2\sqrt{4-3} - 7 = -5$$

$$\therefore m+n = -1 + (-5) = -6$$

8. 무리함수 $y = \sqrt{x-a} + 1$ 에 대하여 $f^{-1}(2) = 3$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(3) = 2$$

$$\therefore 2 = \sqrt{3-a} + 1$$

$$\therefore a = 2$$

9. $y = \sqrt{x-1} + 2$ 의 역함수는?

① $y = x^2 + 4x + 3 (x \geq 2)$

② $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 2)$

③ $y = x^2 + 4x + 3 (x \geq 1)$

④ $y = x^2 - 4x + 5 (x \geq 1)$

⑤ $y = x^2 - 3x + 2 (x \geq 3)$

해설

$$y - 2 = \sqrt{x - 1} \text{ 에서 } \sqrt{x - 1} \geq 0 \text{ 이므로 } y \geq 2$$

$$\text{또 양변을 제곱하면, } (y - 2)^2 = x - 1$$

$$\therefore x = y^2 - 4y + 5 \ (y \geq 2)$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸면 } y = x^2 - 4x + 5 \ (x \geq 2)$$

10. 함수 $y = \frac{ax+8}{x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식이 $x = 6, y = -1$ 일 때, 함수 $y = \sqrt{bx-a}$ 의 정의역에 속하는 정수의 최댓값은? (단, a, b 는 상수이다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$y = \frac{ax+8}{x+b} = \frac{8-ab}{x+b} + a \text{ 이고}$$

점근선의 방정식이 $x = -b = 6, y = a = -1$ 이므로 $a = -1, b = -6$

함수 $y = \sqrt{-6x+1}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \leq \frac{1}{6}\right\}$ 이므로 구하는 정수의 최댓값은 0 이다.

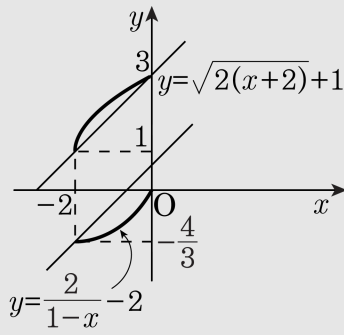
11. 정의역이 $\{x | -2 \leq x \leq 0\}$ 인 두 함수 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$, $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 에 대하여 $y = x + r$ 의 그래프가 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 의 그래프보다는 아래에 있고 $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프 보다는 위에 있을 때, r 은 범위가 $r_1 < r < r_2$ 라고 한다. $3r_1 - r_2$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$-2 \leq x \leq 0$ 에서

$y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 과 $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프를 나타내면 다음 그림과 같다.



이 때, $y = x + r$ 의 그래프가
 $y = \sqrt{2(x+2)} + 1$ 의 그래프보다
아래에 있으므로 $r < 3$
또한, $y = x + r$ 의 그래프가
 $y = \frac{2}{1-x} - 2$ 의 그래프보다
위에 있으므로 $r > \frac{2}{3}$
 $\therefore \frac{2}{3} < r < 3$
따라서 $r_1 = \frac{2}{3}$, $r_2 = 3$ 이므로
 $\therefore 3r_1 - r_2 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 3 = -1$

12. 두 함수 f, g 가 $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $g(x) = \sqrt{x} + 1$ 일 때, $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y = (f \circ g)(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

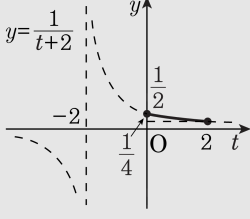
- ① $\frac{1}{4}$
- ② $\frac{1}{2}$
- ③ $\frac{3}{4}$
- ④ 1
- ⑤ $\frac{5}{4}$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\sqrt{x} + 1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + 1 + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + 2}\end{aligned}$$

$\sqrt{x} = t$ 로 놓으면
 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $0 \leq t \leq 2$ 이므로
주어진 함수는 $y = \frac{1}{t+2} (0 \leq t \leq 2)$

따라서 다음 그림에서 $t = 0$ 일 때
최댓값은 $\frac{1}{2}$,
 $t = 2$ 일 때
최솟값은 $\frac{1}{4}$ 이므로
구하는 합은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$



13. 두 함수 $y = \sqrt{x+4}$, $y = x+k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

- ① $3 \leq k < \frac{16}{3}$ ② $3 \leq k < \frac{15}{4}$ ③ $4 \leq k < \frac{17}{4}$
 ④ $4 \leq k < \frac{16}{3}$ ⑤ $4 \leq k < \frac{16}{5}$

해설

i) $y = x+k$ 가 점 $(-4, 0)$ 을 지날 때,

$$0 = -4 + k \quad \therefore k = 4$$

ii) $y = x+k$ 와 $y = \sqrt{x+4}$ 가 접할 때

$x+k = \sqrt{x+4}$ 의 양변을 제곱하면

$$x^2 + 2kx + k^2 = x + 4$$

$$x^2 + (2k-1)x + k^2 - 4 = 0$$

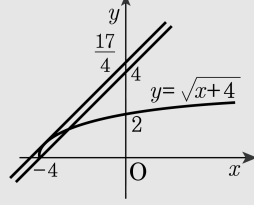
$$D = (2k-1)^2 - 4(k^2 - 4) = 0$$

$$-4k + 1 + 16 = 0 \quad \therefore k = \frac{17}{4}$$

(i), (ii)에서 $y = \sqrt{x+4}$ 와 $y =$

$x+k$ 가 두 점에서 만나려면

$4 \leq k < \frac{17}{4}$ 이어야 한다.

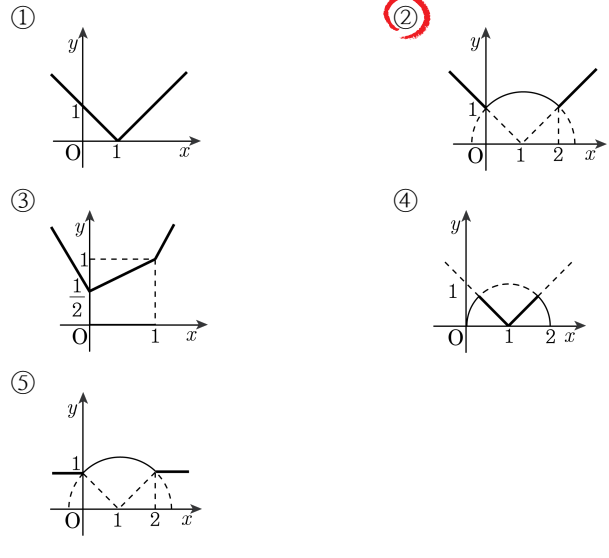


14. $f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ 과 그 역함수를 $g(x)$ 라 할 때 $g(x)$ 와 $f(x), g(x)$ 의 교점 사이의 거리를 각각 옳게 구한 것은?
- ① $g(x) = x^2 - 2x + 2, \sqrt{3}$ ② $g(x) = x^2 - 2x + 2, \sqrt{2}$
③ $g(x) = x^2 - 2x + 1, \sqrt{2}$ ④ $g(x) = x^2 - 2x + 1, \sqrt{3}$
⑤ $g(x) = x^2 - 2x + 1, \sqrt{5}$

해설

$f(x) = \sqrt{x-1} + 1$ 에 대하여
i) $y = \sqrt{x-1} + 1$ 로 놓고 역함수를 구하면
 $y - 1 = \sqrt{x-1} \dots\dots \textcircled{1}$
 $\textcircled{1}$ 을 제곱하면
 $(y-1)^2 = x-1, y^2 - 2y + 1 = x-1, x = y^2 - 2y + 2$
 $\therefore g(x) = x^2 - 2x + 2$
ii) $f(x)$ 와 역함수 $g(x)$ 의 교점은
 $f(x)$ 와 $y = x$ 또는 $g(x)$ 와 $y = x$ 의 교점을
구하면 된다.
 $g(x) = x$ 에서 $x^2 - 2x + 2 = x$
 $x^2 - 3x + 2 = 0, (x-2)(x-1) = 0$
그러므로 $x = 2$ or $x = 1$ 에서 $y = 2$ or $y = 1$
따라서 두 점 $(1, 1), (2, 2)$ 사이의 거리는
 $\sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$

15. 함수 $y = \sqrt{1 + |2x - x^2|}$ 의 그래프는 ?



해설

(i) $2x - x^2 \geq 0$
 즉, $x^2 - 2x \leq 0$ 일 때,
 $0 \leq x \leq 2$
 이 때, $y = \sqrt{1 + 2x - x^2}$ 의 양변을 제곱하면,
 $y^2 = 1 + 2x - x^2$ ($y \geq 0$)
 $(x - 1)^2 + y^2 = 2$ ($y \geq 0$)㉠
 (ii) $2x - x^2 < 0$ 즉, $x^2 - 2x > 0$ 일 때,
 $x < 0$ 또는 $x > 2$
 이 때,
 $y = \sqrt{1 - 2x + x^2}$
 $= \sqrt{(x - 1)^2}$
 $= |x - 1|$ ㉡
 (i), (ii) 에서 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.

