1. x에 대한 이차방정식 $kx^2 - x - (k+7) = 0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하면?(단 k는 상수)

① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

방정식에 $x = 2$를 대입하면
$k \cdot 2^2 - 2 - (k+7) = 0$
$4k - 2 - k - 7 = 0,\ 3k = 9,$
$\therefore\ k = 3$
$3x^2 - x - 10 = 0,\ (3x+5)(x-2) = 0$
$\therefore\ x = 2, -\frac{5}{3}$

2. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

㉠ $x^2+2x+1=0$	㉡ $x^2+2x+4=0$
㉢ $x^2+4x+2=0$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(x+1)^2=0$: 중근

㉡ $a=1, b'=1, c=4$

$1^2-1\cdot 4=-3<0$: 허근

㉢ $a=1, b'=2, c=2$

$2^2-1\cdot 2=2>0$: 서로 다른 두 실근 (○)

3. 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$이 중근을 가질 때, 실수 k의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot k = 0$

$\therefore\ k = 9$

4. 이차방정식 $x^2-x(kx-5)+3=0$이 허근을 가질 때, 정수 k의 최댓값을 구하면?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

$x^2-kx^2+5x+3=0$이 허근은 가지려면

$D=25-4\times 3(1-k)<0$

$25-12+12k<0 \quad \therefore 12k<-13$

$\therefore k<-\frac{13}{12}$이므로

정수 k의 최댓값은 -2

5. 이차방정식 $2x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$은?

① -9　② -2　③ 0　④ 5　⑤ 13

해설

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-4=5$

6. 다음 이차방정식의 해를 바르게 짝지은 것은?

(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
(2) $x^2-3\sqrt{2}x+6=0$

① (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
② (1) $\frac{3\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
③ (1) $\frac{4\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{3}\pm\sqrt{6}i}{2}$
④ (1) $\frac{1\pm 2i}{5}$, (2) $\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$
⑤ (1) $\frac{4\pm 3i}{5}$, (2) $\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

해설

근의 공식을 이용하여 푼다.
(1) $x(5x-4)=4(x-1)$
$\therefore\ 5x^2-8x+4=0$
$\therefore\ x=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{5}=\frac{4\pm 2i}{5}$
(2) $x=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{18-24}}{2}=\frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{6}i}{2}$

7. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 실근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k < 1$　　② $k \leq 1$　　③ $k < 3$

④ $k \leq 3$　　⑤ $1 < k < 3$

해설

$3x^2 + 6x + k = 0,$

$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 3 \cdot k \geq 0$

$3k \leq 9 \quad \therefore \ k \leq 3$

8. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

9. 이차식 x^2+2x+4 를 일차식의 곱으로 인수분해 하여라.

① $(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

② $(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})$

③ $(x+1-\sqrt{2}i)(x+1+\sqrt{2}i)$

④ $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$

⑤ $(x-1-\sqrt{2}i)(x-1+\sqrt{2}i)$

해설

$x^2+2x+4=0$ 의 해를 구하면
$x=-1\pm\sqrt{1-4}=-1\pm\sqrt{3}i$
$\therefore x^2+2x+4$
$=\left\{x-(-1+3\sqrt{i}\right\}\left\{x-(-1-\sqrt{3}i)\right\}$
$=(x+1-\sqrt{3}i)(x+1+\sqrt{3}i)$

10. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 <u>틀린</u> 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{D}{a^2}$이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

11. 일차방정식 $a^2x+1=a^4-x$의 해는? (단, a는 실수)

① a　② $a+1$　③ $a-1$　④ a^2-1　⑤ a^2+1

해설

$a^2x+1=a^4-x$ 에서 $a^2x+x=a^4-1$

$(a^2+1)x=(a^2-1)(a^2+1)$

$\therefore x=a^2-1(\because a^2+1>0)$

12. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}$ ······㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\geq 0$

$\therefore\ k\geq -\frac{25}{8}$ ······㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\leq k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

13. 이차방정식 $x^2-8x+a=0$의 두근을 α, β라 할 때, $\alpha-\beta=7$이 성립한다. 이 때, $\alpha\beta$의 값은? (단, a는 실수)

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

해설

$\alpha+\beta=8,\ \alpha-\beta=7$이므로

$$\alpha\beta=\frac{1}{4}\left\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{4}(8^2-7^2)$$
$$=\frac{15}{4}$$

14. a, b, c는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2-bx+c=0$의 해가 α, β일 때, 방정식 $cx^2-bx+a=0$의 해를 구하면?

① $\alpha,\ \beta$　　② $-\alpha,\ -\beta$　　③ $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta}$

④ $-\dfrac{1}{\alpha},\ -\dfrac{1}{\beta}$　　⑤ $\alpha,\ -\beta$

해설

$\alpha+\beta=\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$cx^2-bx+a=0$에서

(두 근의 합) $=\dfrac{b}{c}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\left(\therefore \dfrac{b}{c}=\dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}\right)$

(두 근의 곱) $=\dfrac{a}{c}=\dfrac{1}{\alpha\beta}$

따라서 구하는 두 근은 $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$이다.

해설

$ax^2-bx+c=0$의 양변을 $x^2(\neq 0)$으로 나누면

$a-\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}=0$

이 때, $\dfrac{1}{x}=t$라 놓으면, $ct^2-bt+a=0$

$t=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\alpha}$ 또는 $\dfrac{1}{\beta}$

$\therefore\ cx^2-bx+a=0$의 해는 $\dfrac{1}{\alpha}$ 또는 $\dfrac{1}{\beta}$이다.

15. 실계수의 이차방정식 $x^2+bx+c=0$이 허근 α, β를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2+2\beta=1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1　　② 1　　③ 3　　④ 5　　⑤ 7

해설

계수가 실수이므로
$\alpha = p+qi$ 이면 $\beta = p-qi$ $(q \neq 0)$
$\alpha^2+2\beta=1$ 이므로
$(p+qi)^2+2(p-qi)=1$ 에서
$(p^2-q^2+2p-1)+2q(p-1)i=0$
$\therefore p^2-q^2+2p-1=0,\ 2q(p-1)=0$
$q \neq 0$이므로
$p=1,\ q^2=2$
$\therefore\ \alpha+\beta=2p=2,\quad \alpha\beta=p^2+q^2=3$
$\therefore\ x^2-2x+3=0$
$\therefore\ b=-2,\ c=3$
$\therefore\ b+c=1$