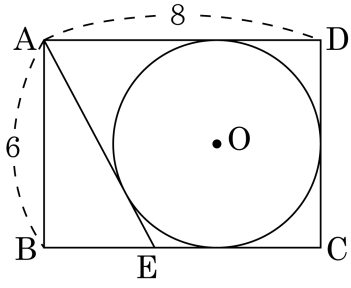


1. 다음 그림에서 $\square ABCD$ 는 $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 8$ 직사각형이다. 원 O 가 $\square AECD$ 에 내접할 때, $\overline{BE}$ 의 길이를 구하여라.

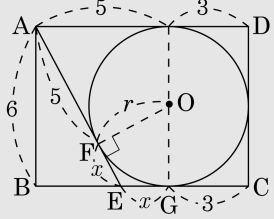


▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{16}{5}$

해설

원 O 의 반지름의 길이를 r 라 하면



$$2r = 6, r = 3$$

$$\overline{FE} = \overline{EG} = x (x < 5) \text{ 라 하면}$$

$$\overline{BE} + \overline{EC} = 8 \text{ 이므로 } \overline{BE} = 5 - x \text{ 이다.}$$

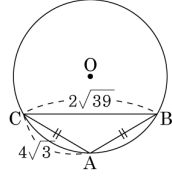
$\triangle ABE$ 에서

$$(5 + x)^2 = (5 - x)^2 + 36, 20x = 36$$

$$\therefore x = \frac{9}{5}$$

$$\therefore \overline{BE} = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$$

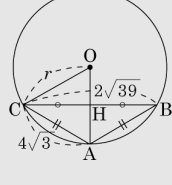
2. 다음 그림과 같은 $\overline{AB} = \overline{AC} = 4\sqrt{3}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{39}$ 인 이등변삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



$\overline{OA}, \overline{OC}$ 를 그리 $\overline{OC}$ 의 길이를 r 이라 하고 $\overline{OA}$ 와 $\overline{CB}$ 의 교점을 H 라 하면 $\overline{OA}$ 는 $\overline{BC}$ 를 수직이등분하므로 $\overline{HC} = \sqrt{39}$

$$\triangle HCA \text{ 에서 } \overline{HA} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (\sqrt{39})^2} = 3$$

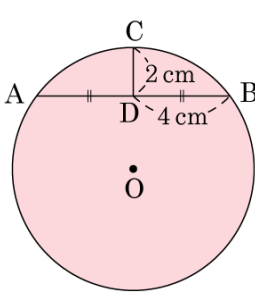
$$\triangle OCH \text{ 에서 } \overline{OC}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{OH}^2$$

$$r^2 = (\sqrt{39})^2 + (r - 3)^2 = 39 + r^2 - 6r + 9$$

$$6r = 48$$

$$\therefore r = 8$$

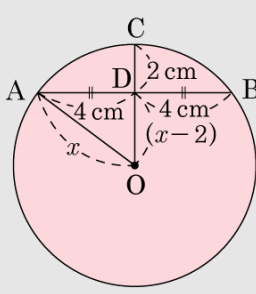
3. 다음 그림과 같이 호 AB는 원 O의 일부분 이고, $AD = BD$, $AB \perp CD$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?



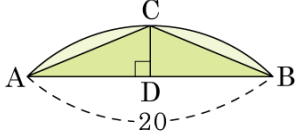
- ① 4 cm ② 5 cm ③ 6 cm ④ 7 cm ⑤ 8 cm

해설

원 O의 반지름의 길이를 x cm라 하면
 $x^2 = 4^2 + (x - 2)^2$
 $x^2 = 16 + x^2 - 4x + 4$
 $4x = 20$
 $\therefore x = 5$ (cm)



4. 다음 그림에서 $\widehat{AB}$ 는 반지름의 길이가 26인 원의 일부이다. $\overline{AB} = 20$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



- ① 10 ② $20\sqrt{2}$ ③ 20 ④ 25 ⑤ $24\sqrt{5}$

해설

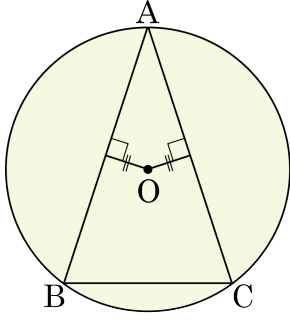
원의 중심 O와 점 C, 점 D를 연결한다.

$$\triangle AOD \text{에서 } \overline{OD} = \sqrt{\overline{AO}^2 - \overline{AD}^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$$

$$\therefore \overline{CD} = \overline{OC} - \overline{OD} = 26 - 24 = 2$$

따라서 넓이는 $\frac{1}{2} \times 20 \times 2 = 20$ 이다.

5. 다음 그림의 원 O에서 $5.0\text{pt}\widehat{BC} = 10\pi$, $\angle BAC = 30^\circ$ 일 때, $5.0\text{pt}\widehat{AC}$ 의 길이는?



- ① 15π ② 18π ③ 22π ④ 25π ⑤ 30π

해설

원의 중심에서 현이 이르는 거리가 같으면 두 현의 길이가 같으므로 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변 삼각형이다.

$\angle A = 30^\circ$ 이므로 $\angle ABC = 75^\circ$

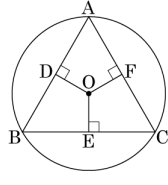
또한 원주각의 크기에 호의 길이는 비례하므로

$$5.0\text{pt}\widehat{BC} : 5.0\text{pt}\widehat{AC} = \angle BAC : \angle ABC$$

$$10\pi : 5.0\text{pt}\widehat{AC} = 30^\circ : 75^\circ$$

$$\therefore 5.0\text{pt}\widehat{AC} = 25\pi$$

6. 다음 그림과 같은 원 O에서 $\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF}$ 이고 $\overline{AB} = 6\text{cm}$ 일 때, 원 O의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : cm^2

▷ 정답 : $12\pi\text{cm}^2$

해설

$$\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} \text{ 이므로 } \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

$$\triangle ABC \text{ 가 정삼각형이므로 } \overline{AB} : \overline{AE} = 2 : \sqrt{3}$$

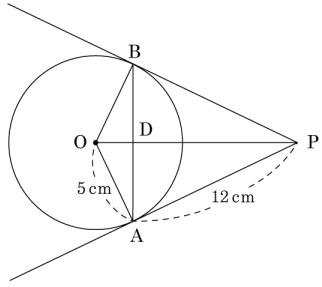
$$\overline{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}(\text{cm})$$

정삼각형의 외심은 내심이며, 또 무게중심이므로

$$\overline{OA} = \frac{2}{3}\overline{AE} = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(\text{cm})$$

$$(\text{원의 넓이}) = \pi \times (2\sqrt{3})^2 = 12\pi(\text{cm}^2)$$

7. 다음 그림에서 두 직선 PA, PB 는 반지름의 길이가 5cm 인 원 O 의 접선이고 점 A, B 는 접점이다. PA = 12cm 일 때, AB 의 길이는?



- ① 24cm ② $\frac{192}{2}$ cm ③ $\frac{120}{13}$ cm
 ④ $\frac{124}{5}$ cm ⑤ 25cm

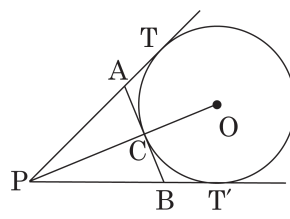
해설

삼각형 PAO 는 직각삼각형이므로 $\overline{PO} = 13$ cm 이다.
 또한, $\overline{AB} \perp \overline{PO}$ 이므로

$$\overline{PA} \times \overline{AO} = \overline{PO} \times \overline{AD} \Rightarrow 12 \times 5 = 13 \times \overline{AD} \therefore \overline{AD} = \frac{60}{13} \text{cm}$$

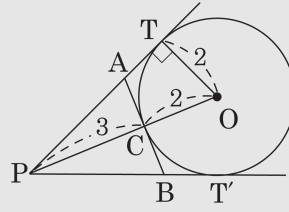
따라서 수선 OD 는 현 AB 를 이등분하므로 $\overline{AB} = 2\overline{AD} = \frac{120}{13}$ cm 이다.

8. 다음 그림에서 원 O는 $\overline{AB}$ 와 점 C에서 접하고, $\overline{PA}$ 와 $\overline{PB}$ 의 연장선과 두 점 T, T'에서 각각 접한다. $\overline{PC} = 3\text{cm}$, $\overline{CO} = 2\text{cm}$ 일 때, $\overline{PT} + \overline{PT'}$ 의 값은?



- ① $\frac{\sqrt{21}}{2}\text{cm}$ ② $\sqrt{21}\text{cm}$ ③ $2\sqrt{21}\text{cm}$
④ $\sqrt{29}\text{cm}$ ⑤ $2\sqrt{29}\text{cm}$

해설

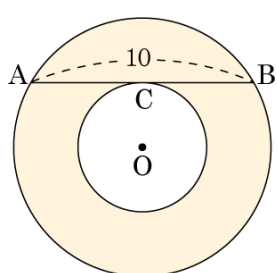


$\triangle POT$ 에서 $\overline{OP} = 5\text{cm}, \overline{OT} = 2\text{cm}$ 이므로

$$\overline{PT} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}\text{cm}$$

$$\overline{PT} = \overline{PT'} \quad \therefore \overline{PT} + \overline{PT'} = \sqrt{21} \times 2 = 2\sqrt{21}\text{cm}$$

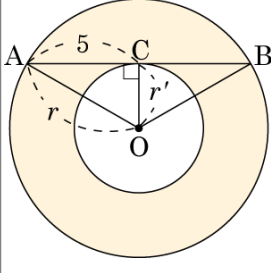
9. 다음 그림과 같이 두 개의 동심원이 있다. 큰 원의 현 AB가 작은 원에 접하고, $\overline{AB} = 10$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하면?



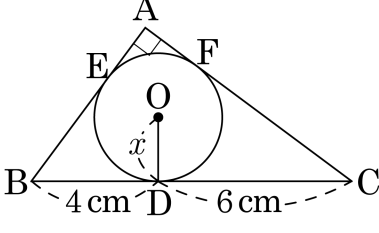
- ① 10π ② 15π ③ 20π ④ 25π ⑤ 30π

해설

큰 원의 반지름의 길이를 r , 작은 원의 반지름의 길이를 r' 이라고 하자.
 $\overline{AB}$ 는 작은 원의 접선이므로 $\overline{OC} \perp \overline{AB}$, $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 5$
 직각삼각형 $\triangle ACO$ 에서 $r^2 - r'^2 = 5^2$
 (색칠한 부분의 넓이) $= \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi(r^2 - r'^2) = 25\pi$



10. 다음 그림에서 점 D, E, F 는 직각삼각형 ABC 와 내접원 O 의 접점일 때, 원 O 의 넓이는?

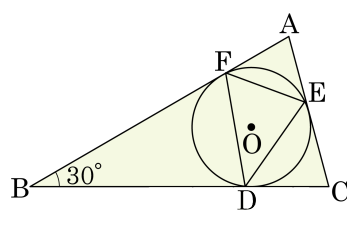


- ① πcm^2 ② $2\pi\text{cm}^2$ ③ $3\pi\text{cm}^2$
④ $4\pi\text{cm}^2$ ⑤ $5\pi\text{cm}^2$

해설

$\overline{BD} = 4\text{cm}$, $\overline{CD} = 6\text{cm}$ 이므로
 $\overline{AB} = (4 + x)\text{cm}$, $\overline{AC} = (6 + x)\text{cm}$ 이다.
 $(4 + x)^2 + (6 + x)^2 = 10^2$
 $2x^2 + 20x + 52 = 100$
 $x^2 + 10x - 24 = 0$
 $(x - 2)(x + 12) = 0$
따라서 $x = 2$ ($x > 0$) 이므로
원 O 의 넓이는 $2^2\pi = 4\pi$ (cm^2)

11. 다음 그림에서 원 O 는 $\triangle ABC$ 의 내접원이고, $\triangle DEF$ 의 외접원이다. $\angle B = 30^\circ$ 일 때, $\angle FED$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답: 1

▶ 정답 : 75°

해설

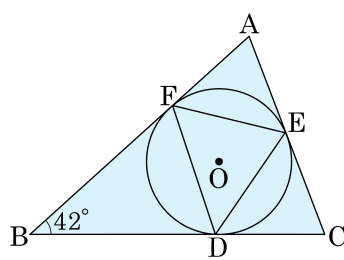
선분 $\overline{OF}$, $\overline{OD}$ 를 그으면

$$\angle FOD = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$\therefore \angle FED = 150^\circ \times \frac{1}{2} = 75^\circ$$

12. 다음 그림에서 원 O는 $\triangle ABC$ 의 내접원이고, $\triangle DEF$ 의 외접원이다. $\angle B = 42^\circ$ 일 때, $\angle FED$ 의 크기를 구하면?

- ① 63° ② 65° ③ 69°
 ④ 72° ⑤ 75°



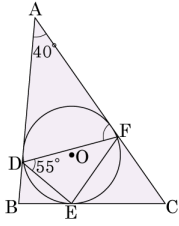
해설

선분 $\overline{OF}$, $\overline{OD}$ 를 그으면

$$\angle FOD = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

$$\therefore \angle FED = 138^\circ \times \frac{1}{2} = 69^\circ$$

13. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 의 내접원은 $\triangle DEF$ 의 외접원이다. $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle FDE = 55^\circ$ 일 때, $\angle AFD$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : °

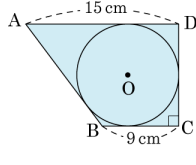
▷ 정답 : 70 °

해설

$$\overline{AD} = \overline{AF} \text{ 이므로}$$

$$\angle AFD = \frac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$$

14. 다음 그림에서 □ABCD 에 내접하는 원 O 의 둘레의 길이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : $\frac{45}{4}\pi$ cm

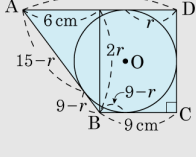
해설

반지름의 길이를 rcm 라 하면 $(15-r+9-r)^2 = 6^2 + (2r)^2, (24-2r)^2 = 36 + 4r^2$

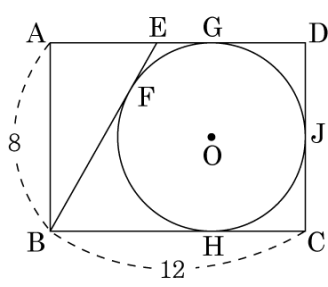
$$576 - 96r + 4r^2 = 36 + 4r^2$$

$$\therefore r = \frac{45}{8}(cm)$$

$$(\text{원의 둘레의 길이}) = 2\pi \times \frac{45}{8} = \frac{45}{4}\pi (cm)$$



15. 다음 그림과 같이 원 O가 직사각형 ABCD의 세 변과 BE에 접할 때, $\overline{BE}$ 의 길이를 구하여라. (단, F, G, H, J는 접점)



▶ 답 :

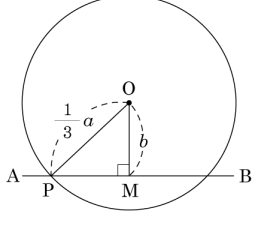
▷ 정답 : 10

해설

$\overline{ED} + \overline{BC} = \overline{BE} + \overline{DC}$ 이므로 $\overline{ED} + 12 = \overline{BE} + 8$ 이다. 따라서 $\overline{ED} = \overline{BE} - 4$ 이다.

$\overline{AE} = \overline{AD} - \overline{ED} = 12 - (\overline{BE} - 4) = 16 - \overline{BE}$ 이므로 직각삼각형 ABE에서 $\overline{BE}^2 = (16 - \overline{BE})^2 + 8^2$ 이다. 따라서 $\overline{BE} = 10$ 이다.

16. 다음 그림과 같이 길이가 a 인 선분 AB 의 중점 M 에서의 수선과 원의 중심 O 가 만난다. $\overline{OM} = b$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}a$ 인 원과 $\overline{AB}$ 가 만나는 한 점을 P 라 한다. 선분 AP 의 길이를 x 라 하고 선분 BP 의 길이를 y 라 하면 $y = x + 2$, $xy = 35$ 의 식이 성립한다고 할 때, $a + b^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$$\overline{OM} = b, \overline{OP} = \frac{1}{3}a \text{ 이므로}$$

피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{PM} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}a\right)^2 - b^2}$$

$$\overline{BP} = y$$

$$= \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 - b^2}$$

$$= \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3}$$

$$\overline{AP} = x$$

$$= \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 - b^2}$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3}$$

이때 $y = x + 2$, $xy = 35$ 이므로

$$y - x = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3} - \left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3}\right)$$

$$= 2 \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3} = 2$$

$$\therefore a^2 - 9b^2 = 9 \dots \textcircled{1}$$

$$xy = \left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3}\right) \left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3}\right)$$

$$= \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 - 9b^2}{9}$$

$$= 35 \dots \textcircled{2}$$

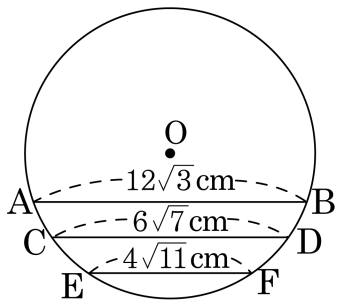
①을 ②에 대입하면 $a^2 = 144$

$\therefore a = 12 (\because a > 0)$

이를 ①에 대입하면 $b^2 = 15$

$$\therefore a + b^2 = 12 + 15 = 27$$

17. 다음 그림과 같이 원 O 에 세 개의 현을 그었을 때 원의 중심 O로부터 세 현까지의 거리의 비가 6 : 9 : 10 이 된다. 세 현의 길이가 각각 $12\sqrt{3}\text{cm}$, $6\sqrt{7}\text{cm}$, $4\sqrt{11}\text{cm}$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▶ 정답 : 12cm

해설

원의 중심 O 에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ 에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N 이라 하면

원의 중심 O로부터 세 현까지의 거리의 비가 6 : 9 : 10 이므로
 $\overline{OL} = 6k$ $\overline{OM} = 9k$ $\overline{ON} = 10k$

 $OL = 6k, OM = 9k, EF = 10k$

원 O 의 반지름의 길이를 r 이라 하고 $\triangle OAL$, $\triangle OCM$, $\triangle OEN$ 에서 각각 피타고라스 정리를 이용하면

$$r^2 = (6k)^2 + (6\sqrt{3})^2 \dots \textcircled{1}$$

$$r^2 = (9k)^2 + (3\sqrt{7})^2 \dots \textcircled{2}$$

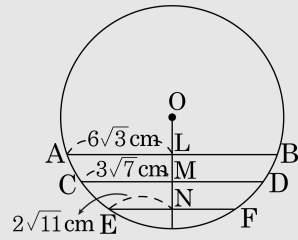
$$r^2 = (10k)^2 + (2\sqrt{11})^2 \dots \textcircled{3}$$

①, ②에 의하여 $36k^2 + 108 = 81k^2 + 63$

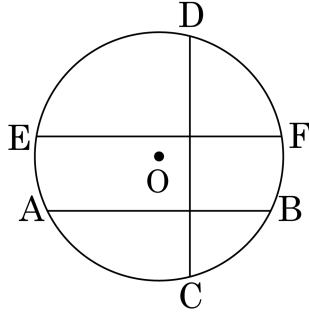
$$\therefore k = 1 (\because k > 0)$$

$k = 1$ 을 ①에 대입하면 $r^2 = 144$

$$\therefore r = 12 (\because r \geq 0)$$



18. 다음 그림과 같이 원 O 에 세 개의 현이 그려져 있다. 현 AB 가 원의 중심 O 로부터 α cm 만큼 떨어져 있고 현 CD 는 현 AB 보다 β cm 만큼 가깝게 떨어져 있고 현 EF 는 현 CD 보다 $\frac{\beta}{2}$ cm 만큼 가깝게 떨어져 있다. 세 현의 길이가 각각 $2\sqrt{10}$ cm, $2\sqrt{22}$ cm, 10cm 일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하여라. (단, $\alpha > 0$, $\beta > 0$)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{26}$

해설

그림과 같이 원의 중심 O 에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ 에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N 이라 하면

$$\overline{OL} = \alpha, \overline{OM} = \alpha - \beta, \overline{ON} = \alpha - \frac{3}{2}\beta$$

원 O 의 반지름의 길이를 r 이라 하고 $\triangle OAL$, $\triangle OCM$, $\triangle OEN$ 에서 각각 피타고라스 정리를 이용하면

$$r^2 = \alpha^2 + (\sqrt{10})^2 \dots \textcircled{1}$$

$$r^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\sqrt{22})^2 \dots \textcircled{2}$$

$$r^2 = (\alpha - \frac{3}{2}\beta)^2 + 5^2 \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 를 하면 } \beta^2 - 2\alpha\beta + 12 = 0 \dots \textcircled{4}$$

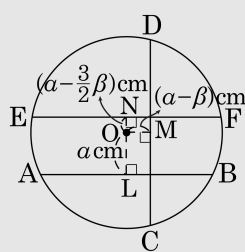
$$\textcircled{3} - \textcircled{2} \text{ 을 하면 } \frac{5}{4}\beta^2 - \alpha\beta + 3 = 0 \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{ 에 의하여 } \beta^2 = 4 \therefore \beta = 2 (\because \beta > 0)$$

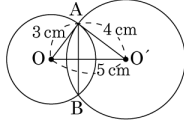
$$\text{이를 } \textcircled{4} \text{ 에 대입하면 } \alpha = 4$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } r^2 = 26$$

$$\therefore r = \sqrt{26} (\because r > 0)$$



19. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3cm, 4cm 인 두 원이 두 점 A, B에서 만나고 중심 사이의 거리가 5cm 일 때, 공통현 AB의 길이를 구하여라.



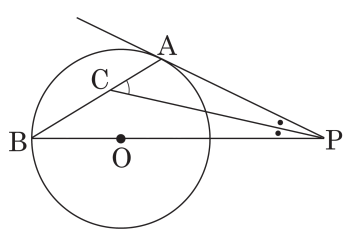
▶ 답 : cm

▷ 정답 : 4.8cm

해설

$\triangle OAO'$ 에서 $\overline{OA}^2 + \overline{O'A}^2 = \overline{OO'}^2$ 이므로 $\angle A = 90^\circ$
점 A에서 $\overline{OO'}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면
 $\triangle AOO' = \frac{1}{2}\overline{OA} \times \overline{O'A} = \frac{1}{2}\overline{OO'} \times \overline{AH}$
즉, $\overline{OA} \times \overline{O'A} = \overline{OO'} \times \overline{AH}$
 $3 \times 4 = 5\overline{AH}$, $\overline{AH} = 2.4 \text{ (cm)}$
 $\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 4.8 \text{ (cm)}$

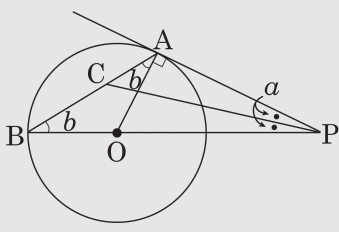
20. 다음 그림에서 $\overline{PA}$ 는 원 O 와 점 A 에서 접하고, 선분 PO 의 연장선과 원 O 가 만나는 점을 B 라 한다. 또, $\angle APB$ 의 이등분선이 $\overline{AB}$ 와 만나는 점을 C 라 할 때, $\angle PCA$ 의 크기를 구하면?



- ① 25° ② 30° ③ 45° ④ 50° ⑤ 60°

해설

점 A 와 점 O 를 연결하면
 $\angle OAP = 90^\circ$



$\angle APC = \angle OPC = a$, $\angle OAB = \angle OBA = b$ 라 하면, $\triangle ABP$ 에서 $90^\circ + 2(a + b) = 180^\circ$

$$\therefore a + b = 45^\circ$$

$\triangle CBP$ 에서 $\angle PCA = \angle CPB + \angle CBP$

$$\therefore \angle PCA = a + b = 45^\circ$$

21. 원 O의 외부의 한 점 P에서 그 원에 그은 접선과 할선이 원과 만나는 점을 각각 T, A, B라 할 때, 선분 BT는 원의 지름이고 $\overline{PA} = 2$, $\overline{PT} = 6$ 일 때, 원 O의 둘레의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $12\sqrt{2}\pi$

해설

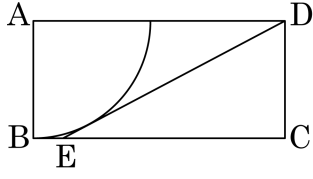
$$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}, 36 = 2 \times \overline{PB} \quad \therefore \overline{PB} = 18$$

피타고라스 정리에 의하여 원의 지름은

$$\overline{BT} = \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{PT}^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$$

따라서 원 O의 둘레의 길이는 $12\sqrt{2}\pi$ 이다.

22. 다음 그림은 직사각형 ABCD 에서 점 A 를 중심으로 사분원을 그린 것이다. 점 D 에서 사분원에 그은 접선과 선분 BC 가 만나는 점을 E 라 하고 직사각형의 가로, 세로의 길이가 각각 13, 5 일 때, 선분 EC 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

점 D 에서 사분원에 그은 접선의 접점을 P 라 하고 보조선 AP 를 그으면

$$\overline{AP} = \overline{AB} = 5 \text{ (원의 반지름)}$$

$$\text{삼각형 APD 에서 } \overline{DP} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$$

$$\text{이 때 } \overline{EC} = x \text{ 라 하면 } \overline{BE} = \overline{DE} = 13 - x$$

$$\therefore \overline{DE} = 12 + 13 - x = 25 - x$$

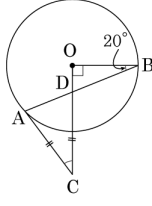
삼각형 DEC 에서

$$(25 - x)^2 = x^2 + 5^2$$

$$625 - 50x + x^2 = x^2 + 25$$

$$\therefore x = 12$$

- 23.** 다음 그림에서 선분 AC는 원 O의 접선이고 $\overline{AC} = \overline{CD}$, $\angle OBD = 20^\circ$ 일 때, $\angle ACD$ 의 크기를 구하여라.



10

▷ 정답: 40°

해설

다음 그림과 같이 점 B에서 접선을 그어 $\overline{AC}$ 의 연장선과 만나는 점을 P라 하면

$$\overline{PA} = \overline{PB} \text{ 이므로 } \angle PAD = \angle PBD$$
$$\overline{AC} = \overline{CD} \text{ 이므로 } \angle CAD = \angle CDA$$
$$\therefore \angle PBD = \angle CDA$$

여기서 $\angle PBD$ 와 $\angle CDA$ 는 동위각이므로 $PB \parallel CD$ 이면 $\angle BPO = 90^\circ$ 이므로 $\angle BOC = 90^\circ$

이때 $\angle PBO = 90^\circ$ 이므로 $\angle BOC = 90^\circ$
삼각형 BOD에서

삼각형 BOD 에서

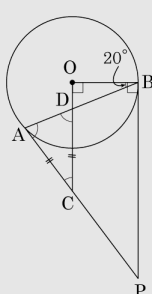
$$\angle ODB = 180^\circ - (90^\circ + 20^\circ) = 70^\circ$$

삼각형 ADC 에서

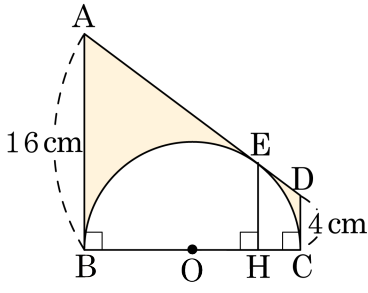
$\angle ADC = 70^\circ$ ($\angle ODB$ 의 맞꼭지각)

삼각형 ADC 는 이등변삼각형이므로

$$\angle ACD = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 40^\circ$$



24. 그림과 같이 반원 O 에 세 접선을 그어 그 교점과 접점을 각각 A, B, C, D, E 라고 한다. $\overline{AB} = 16\text{cm}$, $\overline{CD} = 4\text{cm}$ 이고, 점 E 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\overline{EH}$ 의 길이를 구하여라.

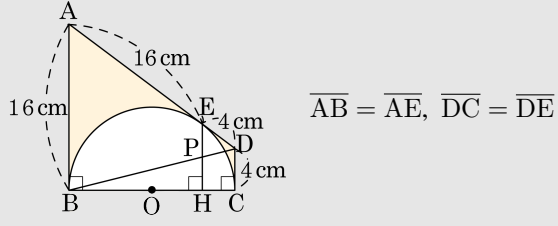


▶ 답 : cm

▷ 정답 : $\frac{32}{5}$ cm

해설

다음 그림과 같이 점 B 와 점 D 를 연결하는 보조선을 긋고 $\overline{BD}$ 와 $\overline{EH}$ 의 교점을 P 라고 하자.



$\overline{AB} \parallel \overline{EP} \parallel \overline{DC}$ 이므로

$\triangle ABD \sim \triangle EPD$, $\triangle BCD \sim \triangle BHP$

$\triangle ABD \sim \triangle EPD$ 에서 $\overline{DE} : \overline{DA} = \overline{EP} : \overline{AB}$,

$4 : 20 = \overline{EP} : 16$

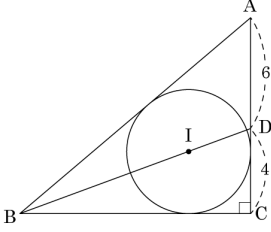
$\therefore \overline{EP} = \frac{16}{5}(\text{cm})$

또, $\triangle BCD \sim \triangle BHP$ 에서 $\overline{BP} : \overline{BD} = \overline{PH} : \overline{CD}$ 이고, $\overline{BP} : \overline{BD} = \overline{AE} : \overline{AD}$ 이므로 $16 : 20 = \overline{PH} : 4$

$\therefore \overline{PH} = \frac{16}{5}(\text{cm})$

따라서 $\overline{EH} = \overline{EP} + \overline{PH} = \frac{32}{5}(\text{cm})$ 이다.

25. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 의 내심을 I 라 하고, $\overline{BI}$ 의 연장선이 $\overline{AC}$ 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\overline{AD} = 6, \overline{CD} = 4$ 이다. 내접원의 반지름의 길이를 구하여라.



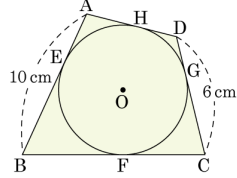
▶ 답 :

▷ 정답 : $5 - \sqrt{5}$

해설

$\overline{BD}$ 가 $\angle ABC$ 의 이등분선이므로 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{CD} = 6 : 4 = 3 : 2$
 $\overline{AB} = 3a, \overline{BC} = 2a$ 로 놓으면
 $9a^2 = 4a^2 + 100$
 $5a^2 = 100$
 $a = 2\sqrt{5} (\because a > 0)$
 $\frac{1}{2} \times 10 \times 4\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times r \times (10 + 10\sqrt{5})$
 $\therefore r = 5 - \sqrt{5}$

26. 다음 그림과 같이 반지름이 4cm 인 원 O 에 외접하는 사각형 ABCD 의 각 변과 원 O 의 접점을 E, F, G, H 라 할 때, 사각형의 넓이를 구하여라.

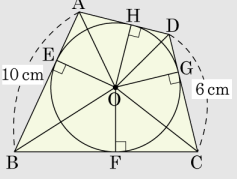


▶ 답 : cm²

▶ 정답 : 64 cm²

해설

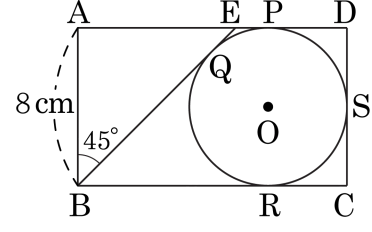
외접 사각형의 성질에 의해서 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD} = 16(\text{cm})$



또한, 원의 반지름과 사각형의 모든 변은 수직으로 만나므로 (사각형의 넓이)

$$\begin{aligned}
 &= \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COD + \triangle DOA \\
 &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{DA} \times r \\
 &= \frac{1}{2} \times r \times (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}) \\
 &= \frac{1}{2} \times 4 \times 32 = 64(\text{cm}^2)
 \end{aligned}$$

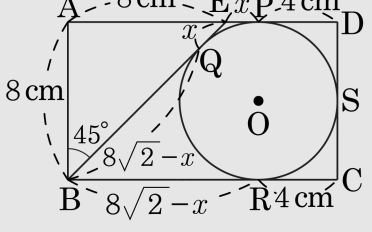
27. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 8\text{cm}$ 인 직사각형 ABCD 의 세 변과 $\overline{BE}$ 에 접하는 원 O 에 대하여 $\angle ABE = 45^\circ$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이를 구하여라.



▶ 답 : cm

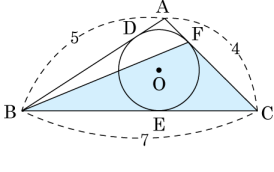
▷ 정답 : $32 + 8\sqrt{2}$ cm

해설



그림과 같이 $\overline{EP} = x$ 라고 하면 $\overline{EQ} = \overline{EP} = x$ 이고, 직각이등변삼각형 ABE 에서 $\angle ABE = 45^\circ$ 이므로 $\overline{BE} = 8\sqrt{2}$,
 $\overline{BQ} = \overline{BR} = 8\sqrt{2} - x$
 $\overline{AD} = x + 12$,
 $\overline{BC} = 8\sqrt{2} + 4 - x$ 이므로 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 에서
 $x + 12 = 8\sqrt{2} + 4 - x \quad \therefore x = (4\sqrt{2} - 4)$
 $\therefore \overline{AD} = 12 + 4\sqrt{2} - 4 = 8 + 4\sqrt{2}$
따라서 직사각형의 둘레의 길이는
 $(8 + 8 + 4\sqrt{2}) \times 2 = (32 + 8\sqrt{2})\text{cm}$ 이다.

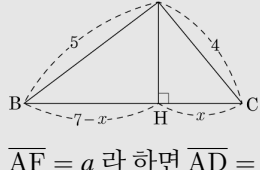
28. 다음 그림에서 원 O는 $\triangle ABC$ 의 내접원이고 점 D, E, F는 접점이다.
 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 7$, $\overline{AC} = 4$ 일 때, $\triangle BCF$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{6}$

해설



$\overline{AF} = a$ 라 하면 $\overline{AD} = \overline{AF} = a$, $\overline{BD} = \overline{BE} = 5 - a$, $\overline{CE} = \overline{CF} = 4 - a$

$\overline{BC} = (5 - a) + (4 - a) = 7$ 이므로 $a = \overline{AF} = 1$, $\overline{FC} = 3$

다음 그림에서 $\overline{CH} = x$ 라 하면 $\overline{BH} = 7 - x$

$\overline{AH}^2 = 4^2 - x^2 = 5^2 - (7 - x)^2$

$\therefore x = \frac{20}{7}$

$\triangle AHC$ 에서 $\overline{AH} = \sqrt{4^2 - (\frac{20}{7})^2} = \sqrt{16 - \frac{400}{49}} = \sqrt{\frac{384}{49}} =$

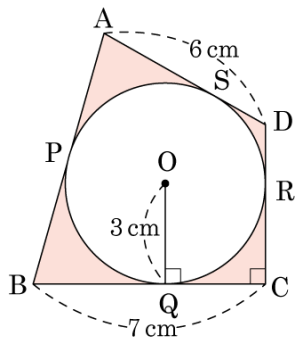
$\frac{8}{7}\sqrt{6}$

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{8}{7}\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

이때 $\overline{AF} : \overline{FC} = 1 : 3$ 이므로 $\triangle BCF = \frac{3}{4}\triangle ABC = \frac{3}{4} \times 4\sqrt{6} =$

$3\sqrt{6}$ 이다.

29. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 3cm인 원에 외접하는 사각형 ABCD에 대하여 P, Q, R, S는 접점이고, $\overline{AD} = 6\text{cm}$, $\overline{BC} = 7\text{cm}$, $\angle BCD = 90^\circ$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : cm^2

▷ 정답 : $39 - 9\pi \text{cm}^2$

해설

다음 그림에서 $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ 라 하면 $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$ 이므로

$$a + b = 13, \overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = \overline{OS} = 3$$

$\therefore \square ABCD$

$$= \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD + \triangle ODA$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{OP} + \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{OQ} + \frac{1}{2} \cdot$$

$$\overline{CD} \cdot \overline{OR} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{OS}$$

$$= \frac{3}{2} (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA})$$

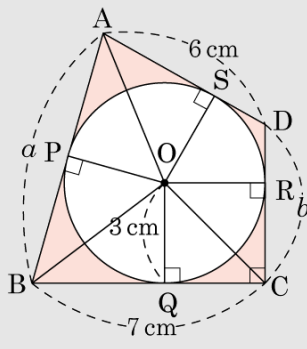
$$= \frac{3}{2} \times 26 = 39(\text{cm}^2)$$

원 O의 넓이는 $9\pi \text{cm}^2$ 이므로

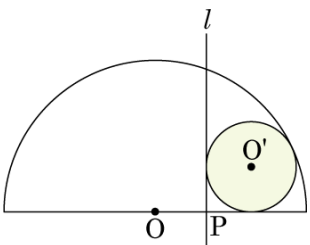
(색칠한 부분의 넓이)

$$= (\square ABCD \text{의 넓이}) - (\text{원 O의 넓이})$$

$$= 39 - 9\pi \text{cm}^2$$



30. 다음 그림과 같이 반지름이 $\frac{5}{2}$ 인 반원 O 의 지름 위에 $\overline{OP} = \frac{7}{10}$ 인 점 P 를 지나면서 지름에 수직인 직선 l 을 그렸을 때, 직선 l 과 반원 O 에 접하는 원 O' 의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{4}{5}$

해설

원 O' 의 반지름을 x 라 하면

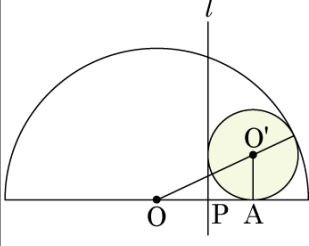
$$\overline{OO'} = \frac{5}{2} - x$$

$$\overline{OA} = \frac{7}{10} + x$$

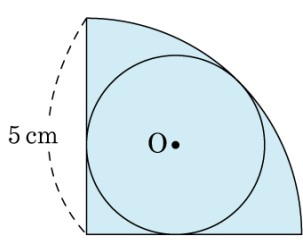
$$\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 = \left(x + \frac{7}{10}\right)^2 + x^2$$

$$25x^2 + 160x - 144 = 0$$

$$\therefore x = \frac{4}{5} (\because x > 0)$$



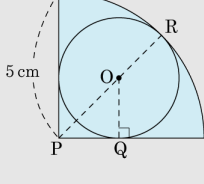
31. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5cm인 사분원에 내접하는 원 O가 있다. 원 O의 반지름의 길이는?



- ① $(5\sqrt{2} - 5)$ cm ② $(4\sqrt{2} - 5)$ cm ③ $(3\sqrt{2} - 5)$ cm
 ④ $(2\sqrt{2} - 5)$ cm ⑤ $(\sqrt{2} - 5)$ cm

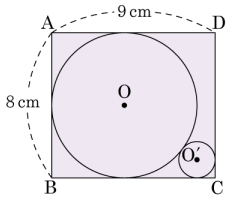
해설

원 O의 반지름을 x cm 라 한다.
 그림과 같이 보조선을 그으면



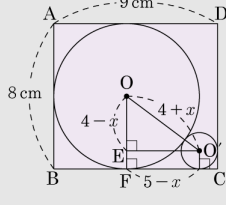
$$\begin{aligned} \overline{PR} &= \overline{PO} + \overline{OR} \\ \sqrt{2}x + x &= 5 \\ (\sqrt{2} + 1)x &= 5 \\ x &= 5(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

32. 다음 그림과 같이 가로 길이가 9cm, 세로 길이가 8cm인 직사각형에 서로 접하는 두 원이 있다. 이때 큰 원과 작은 원의 넓이의 합은?



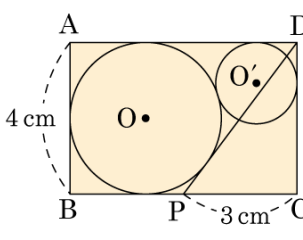
- ① $4\pi\text{cm}^2$
- ② $16\pi\text{cm}^2$
- ③ $17\pi\text{cm}^2$
- ④ $18\pi\text{cm}^2$
- ⑤ $20\pi\text{cm}^2$

해설



큰 원의 반지름은 4 cm,
작은 원의 반지름을 x cm 라 하면
 $\overline{OO'} = 4 + x$, $\overline{OE} = 4 - x$, $\overline{O'E} = \overline{CF} = 5 - x$ 이므로
 $(4 + x)^2 = (4 - x)^2 + (5 - x)^2$
 $x^2 - 26x + 25 = 0, (x - 1)(x - 25) = 0 \therefore x = 1$
따라서 두 원의 넓이의 합은 $\pi \times 4^2 + \pi \times 1^2 = 17\pi(\text{cm}^2)$ 이다.

33. 다음 그림에서 사각형 ABCD 는 직 사각형이고, $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\overline{PC} = 3\text{cm}$ 이다. 사각형 ABPD 가 원 O 에 외 접하고 원 O' 은 원 O 에 접하고, 변 AD, CD 에 접한다. 원 O' 의 반지름 은?



- ① $(8 + 4\sqrt{3})\text{cm}$ ② $(8 - 4\sqrt{3})\text{cm}$ ③ $(4 + 2\sqrt{3})\text{cm}$
 ④ $(4 - 2\sqrt{3})\text{cm}$ ⑤ 1cm

해설

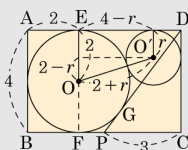
$\overline{FP} = \overline{GP} = x\text{cm}$ 라 하자.
 $\triangle DPC$ 에서

$$\overline{DP} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{PC}^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2}$$

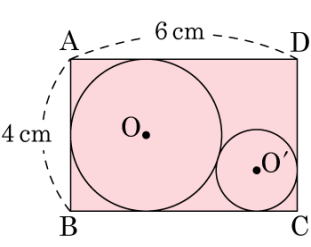
$$= 5(\text{cm})$$

$$\overline{DG} = 5 - x(\text{cm})$$
 또 $\overline{ED} = \overline{FC} = \overline{FP} + \overline{PC} = x + 3(\text{cm})$
 $\overline{ED} = \overline{DG}$ 이므로 $x + 3 = 5 - x$, $x = 1$
 $\therefore \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED} = 2 + 4 = 6(\text{cm})$



원 O' 의 반지름을 $r\text{cm}$ 라 하면
 $(2 + r)^2 = (2 - r)^2 + (4 - r)^2$
 $r^2 - 16r + 16 = 0$
 $\therefore r = 8 - 4\sqrt{3}(\because 0 < r < 2)$

34. 가로 세로 길이가 6cm, 4cm 인 직사각형에서 가능한 한 큰 원을 올려내고, 남은 부분에서 또 가능한 한 큰 원을 올려낼 때 두 번째 원의 반지름의 길이는?



- ① $(6 - 4\sqrt{3})\text{cm}$ ② $(4 - 4\sqrt{3})\text{cm}$ ③ $(8 - 4\sqrt{3})\text{cm}$
 ④ $(6 - \sqrt{3})\text{cm}$ ⑤ $(8 - \sqrt{3})\text{cm}$

해설

작은 원의 반지름을 $r\text{cm}$ 라고 하면 큰 원의 반지름은 2cm 이므로

$$(2 - r)^2 + (4 - r)^2 = (2 + r)^2$$

$$\therefore r = 8 - 4\sqrt{3} (\because 0 < r < 2)$$