1. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 두 점 $(4,\ 8)$, $\left(b,\ \frac{9}{2}\right)$ 를 지난다. 이 함수와 x 축 대칭인 이차함수가 $(b,\ c)$ 를 지날 때, c 의 값은?(단, $b < 0$)

① -2 ② $-\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{9}{2}$

해설

$y = ax^2$ 에 $(4,\ 8)$, $\left(b,\ \frac{9}{2}\right)$ 을 대입하면

$a = \frac{1}{2}$, $b = -3$ 이다.

이 이차함수와 x 축 대칭인 이차함수는

$y = -\frac{1}{2}x^2$ 이고 $(-3, c)$ 를 지나므로

$\therefore\ c = -\frac{9}{2}$

2. 이차함수 $y = ax^2$ 의 그래프가 $y = -\frac{3}{2}x^2$ 의 그래프보다 폭이 좁고, $y = 2x^2$ 의 그래프보다 폭이 넓다고 할 때, 음수 a 의 값의 범위는?

① $-\frac{3}{2} < a < 2$ ② $-\frac{3}{2} < a < -2$ ③ $\frac{3}{2} < a < 2$

④ $-2 < a < -\frac{3}{2}$ ⑤ $-2 < a < \frac{3}{2}$

해설

$\frac{3}{2} < |a| < 2$

$\frac{3}{2} < a < 2$ 또는 $-2 < a < -\frac{3}{2}$ 이고, a 가 음수이므로 $-2 < a < -\frac{3}{2}$ 이다.

3. $y = 2x^2$ 의 그래프 위의 두 점 A$(2,\ p)$, B$(q,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은?(단, $q < 0$)

① $y = 2x - 3$　② $y = -2x + 3$　③ $y = 2x + 4$

④ $y = -2x + 4$　⑤ $y = 2x - 4$

해설

$(2,\ p)$ 를 $y = 2x^2$ 에 대입하면 $p = 2 \times 2^2 = 8$

$(q,\ 2)$ 를 대입하면 $2 = 2q^2$, $q^2 = 1$에서 $q = \pm 1$

그런데 $q < 0$ 이므로 $q = -1$

$(2,\ 8)$, $(-1,\ 2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

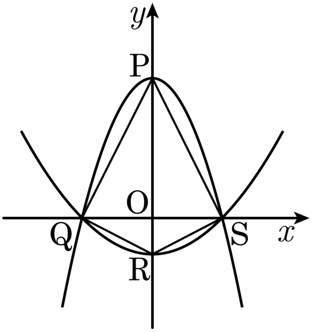
$$(\text{기울기}) = \frac{8-2}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2$$

$y = 2x + b$ 에 $(2,\ 8)$ 을 대입하면

$8 = 2 \times 2 + b \quad \therefore \quad b = 4$

따라서 구하는 식은 $y = 2x + 4$

4. 함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동하고, $y=\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그림을 나타낸 것이다. 이 때 다음 설명 중 옳은 것의 개수는?



㉠ 점 $\mathrm{P}(0,4)$ 이고, 점 $\mathrm{R}(0,-1)$ 이다.
㉡ 점 $\mathrm{Q}(2,0)$ 이고, 점 $\mathrm{S}(-2,0)$ 이다.
㉢ $\overline{\mathrm{QS}}=8$ 이다.
㉣ $\triangle\mathrm{PRS}=5,\ \triangle\mathrm{QPR}=8$ 이다.
㉤ $\square\mathrm{PQRS}=12$ 이다.

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

함수 $y=-x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 4 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=-x^2+4$

함수 $y=\frac{1}{4}x^2$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{1}{4}x^2-1$

$y=-x^2+4$ 에 $y=0$ 을 대입하면 점 $\mathrm{Q}(-2,0),\ \mathrm{S}(2,0)$ 이다.
$\overline{\mathrm{QS}}=4$
또, $\mathrm{P}(0,\ 4)$ 이고 $\mathrm{R}(0,\ -1)$
$\triangle\mathrm{PRS}=\triangle\mathrm{QPR}=5$
따라서 옳은 것은 ㉠이므로 1 개이다.

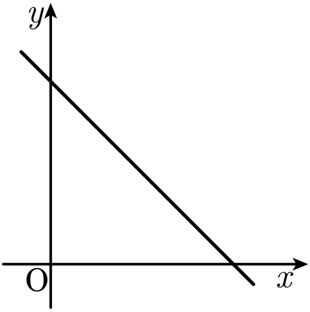
5. 이차함수 $y = -3x^2$ 의 그래프를 꼭짓점의 좌표가 $(5, -2)$ 가 되도록 평행이동하면 점 $(k, -3)$ 을 지난다. 이 때, 상수 k 의 값을 모두 곱하면?

① $\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{74}{3}$ ④ $-\frac{80}{3}$ ⑤ -10

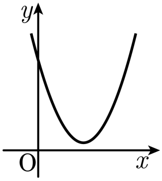
해설

$y = -3x^2$ 을 꼭짓점의 좌표가 $(5, -2)$가 되도록 평행이동하면 $y = -3(x-5)^2 - 2$ 이고
$y = -3(x-5)^2 - 2$ 가 점 $(k, -3)$ 을 지나므로 대입하면 $-3 = -3(k-5)^2 - 2$, $3k^2 - 30k + 74 = 0$ 이다.
상수 k 의 값의 곱은 $3k^2 - 30k + 74 = 0$ 의 두 근의 곱과 같으므로 $\frac{74}{3}$ 이다.

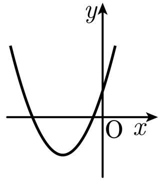
6. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $y = a(x + b)^2 - a$ 의 그래프로 적당한 것은?



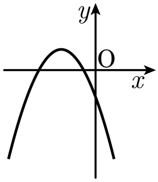
①



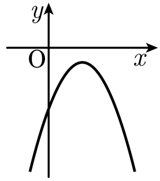
②



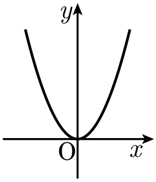
③



④



⑤



해설

그래프가 오른쪽 아래를 향하므로 $a < 0$ 이고 (y절편) > 0 이므로 $b > 0$ 이다. 따라서 $y = a(x + b)^2 - a$ 의 그래프는 위로 볼록하고, $-b < 0$, $-a > 0$ 이므로 꼭짓점이 제 2 사분면 위에 있는 그래프이다.

7. 다음 보기의 이차함수 그래프 중 $y = ax^2$ 의 그래프가 3 번째로 폭이 넓을 때, $|a|$ 의 범위는?

보기

ㄱ $y = -\frac{3}{2}x^2$ ㄴ $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}$

ㄷ $y = 2x^2 - x$ ㄹ $-3(x+2)^2$

ㅁ $y = \frac{x(x-1)(x+1)}{x+1}$

① $1 < |a| < \frac{1}{2}$ ② $1 < |a| < \frac{3}{2}$ ③ $1 < |a| < \frac{5}{2}$

④ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{1}{2} < |a| < \frac{5}{2}$

해설

a 의 절댓값이 작을수록 폭이 넓어진다.

a 의 절댓값을 각각 구하면

ㄱ $\frac{3}{2}$ ㄴ $\frac{1}{2}$ ㄷ 2 ㄹ 3 ㅁ 1 이므로 폭이 넓은 순서는 ㄴ, ㅁ, ㄱ, ㄷ, ㄹ 이다. 따라서 두 번째인 1과 세 번째인 $\frac{3}{2}$ 사이에 있어야 하므로

④ $1 < |a| < \frac{3}{2}$ 이다.

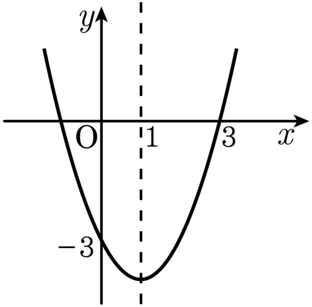
8. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ 3)$ 일 때, 이 그래프가 제 2 사분면을 지나지 않을 a 의 값의 범위는? (단, $a \neq 0$ 임)

① $a < -\dfrac{4}{3}$ ② $a \leq -\dfrac{4}{3}$ ③ $a < \dfrac{3}{4}$
④ $a \leq -\dfrac{3}{4}$ ⑤ $a > \dfrac{4}{3}$

해설

a 의 부호에 따라 그래프의 모양이 다르므로 양수인 경우와 음수인 경우로 나누어 생각해야 한다면
$a > 0$ 이면 항상 제 2 사분면을 지난다.
$a < 0$ 이면 y 절편이 양수일 때에는 제 2 사분면을 지나고 y 절편이 음수이거나 0 일 때 제 2 사분면을 지나지 않는다.
꼭짓점이 $(2,\ 3)$ 이므로 $y = a(x-2)^2 + 3$ 이다.
즉, $y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$ 이다.
여기서 y 절편은 $4a + 3$ 이다.
$4a + 3 \leq 0$
$\therefore a \leq -\dfrac{3}{4}$

9. 다음 그림은 직선 $x = 1$ 을 축으로 하는 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 이 때, $a + b + c$ 의 값은?



① -4 ② -1 ③ 0 ④ 2 ⑤ 5

해설

$y = a(x-1)^2 + q$

$x = 0$ 일 때, $a + q = -3 \quad \cdots\cdots (1)$

$x = 3$ 일 때, $4a + q = 0 \quad \cdots\cdots (2)$

(2) 에서 (1) 을 빼면, $3a = 3$

$\therefore \; a = 1, \; q = -4$

$y = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x - 3$

따라서 $x = 1$ 일 때, $y = a + b + c = -4$ 이다.

10. $x+y=10$ 일 때, x^2+y^2 의 최솟값을 구하면?

① 10 ② 24 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

해설

$y=10-x$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= x^2+(10-x)^2 \\ &= x^2+x^2-20x+100 \\ &= 2x^2-20x+100 \\ &= 2(x^2-10x+25-25)+100 \\ &= 2(x-5)^2+50 \end{aligned}$$

따라서 $x=5$ 일 때 최솟값은 50 이다.

11. 이차함수 $f(x)=x^2-1$에 대하여 $f^1(x)=f(x)$, $f^{n+1}=f(f^n(x))$라 할 때, $f^{2009}(-1)$의 값을 구하여라.

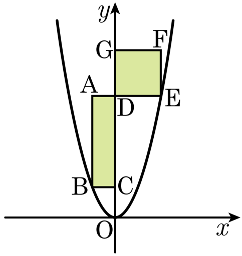
▶ **답 :**

▷ **정답 :** 0

해설

$$f^1(-1)=0$$
$$f^2(-1)=f(f'(-1))=f(0)=-1$$
$$f^3(-1)=f(f^2(-1))=f(-1)=0$$
$$f^4(-1)=f(f^3(-1)=f(0)=-1$$
$$\vdots$$
$$\therefore\ f^{2009}(-1)=0$$

12. 다음 그림에서 포물선은 $y = 2x^2$ 이고, 직사각형 ABCD 의 넓이와 정사각형 DEFG 의 넓이는 같다. $\overline{DE} = 2\overline{AD}$ 일 때, 점 E 의 x 좌표값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{3}$

해설

점 E 의 x 좌표값을 p 라 하면 $\overline{DE} = 2\overline{AD} = p$ 이다.

$\square ABCD = \square DEFG$ 에서 $\overline{AD} \times \overline{CD} = \overline{DE}^2$,

$\frac{1}{2}\overline{DE} \times \overline{CD} = \overline{DE}^2$

$\therefore\ \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{CD}$, $\overline{CD} = 2p \quad \cdots$ ㉠

또, $\overline{BC} = \overline{AD} = \frac{p}{2}$ 이므로 점 B $\left(-\frac{p}{2},\ \frac{p^2}{2}\right)$, $\overline{OC} = \frac{p^2}{2}$,

$\overline{DE} = p$ 에서 점 $E(p,\ 2p^2)$, $\overline{OD} = 2p^2$

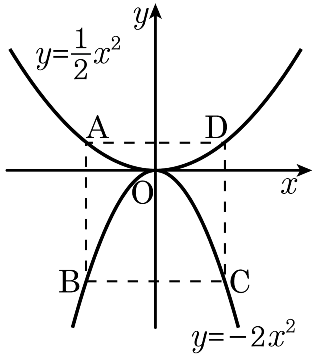
$\therefore\ \overline{CD} = \overline{OD} - \overline{OC} = 2p^2 - \frac{p^2}{2} = \frac{3}{2}p^2 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{3}{2}p^2 = 2p$, $p(3p-4) = 0$

$\therefore\ p = \frac{4}{3} (\because\ p > 0)$

따라서 점 E 의 x 좌표값은 $\frac{4}{3}$ 이다.

13. 다음 그림과 같이 두 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=-2x^2$ 의 그래프 위에 네 점 A, B, C, D 가 있다. 이 때, □ABCD 는 정사각형일 때, 점 A 의 y 좌표는?



① $\frac{2}{25}$ ② $\frac{4}{25}$ ③ $\frac{6}{25}$ ④ $\frac{8}{25}$ ⑤ $\frac{11}{25}$

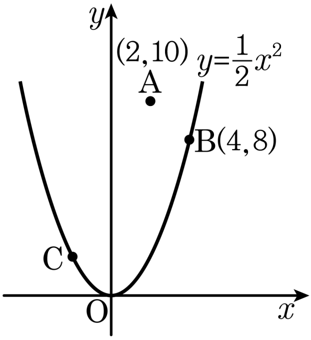
해설

점 A 의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ 이라고 하면 B$\left(a,\ -2a^2\right)$, D$\left(-a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ 이고 $\overline{AD}=\overline{AB}$ 이므로

$2a=\left\{\frac{1}{2}a^2-(-2a^2)\right\}$, $a=\frac{4}{5}$ $(\because a\neq 0)$ 이다.

따라서 점 A 의 y 좌표는 $\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{8}{25}$ 이다.

14. 정점 $A(2, 10)$, $B(4, 8)$에 대하여 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$의 그래프 위에 점 C를 잡고 $\angle B$가 직각인 직각삼각형 ABC를 만들 때, 점 C의 y좌표를 p라 하자. 또 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$의 그래프 위에 점 D를 잡아서, $\overline{AD} = \overline{BD}$인 이등변삼각형 ABD를 만들 때, 점 D의 y좌표를 q라 하자. 이 때, $p + (q - 7)^2$의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 15

해설

직선 AB의 방정식은 $y = -x + 12$

따라서, 직선 AB에 수직인 직선 BC는 점 $(4, 8)$을 지나고, 기울기 1인 직선이다.

$\therefore y = x + 4$

$\frac{1}{2}x^2 = x + 4,\ x^2 - 2x - 8 = 0,\ (x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore x = -2$ 또는 $x = 4$

점 C의 x좌표가 -2이므로

y좌표는 $\frac{1}{2} \times (-2)^2 = 2 = p$

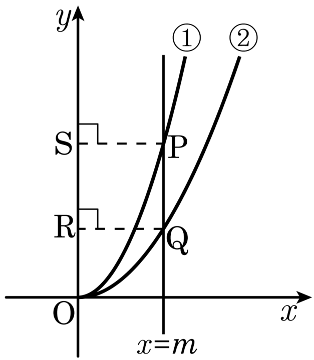
$\overline{AB}$의 중점 $(3, 9)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y = x + 6$이다. $\frac{1}{2}x^2 = x + 6x^2 - 2x - 12 = 0$

$\therefore x = 1 \pm \sqrt{1 - (-12)} = 1 \pm \sqrt{13}$

$$y = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13})^2$$
$$= \frac{1}{2}(14 \pm 2\sqrt{13}) = 7 \pm \sqrt{13} = q$$

$\therefore p + (q - 7)^2 = 2 + 13 = 15$

15. 다음 그림은 이차함수 $y=\frac{3}{4}x^2(x\geq 0)\cdots$①, $y=\frac{1}{3}x^2(x\geq 0)\cdots$②의 그래프이다. y축에 평행한 직선 $x=m(m>0)$이 ①과 만나는 점을 P, ②와 만나는 점을 Q라 하고, 두 점 P, Q에서 y축에 내린 수선이 y축과 만나는 점을 각각 S, R이라 할 때, □PQRS가 정사각형이 되는 m의 값을 구하면?



① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{12}{5}$ ⑤ $\frac{13}{5}$

해설

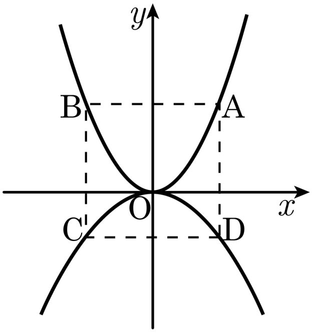
□PQRS가 정사각형이 되려면

$\frac{3}{4}m^2-\frac{1}{3}m^2=m$이어야 한다.

이것을 풀면 $\frac{5}{12}m^2=m$

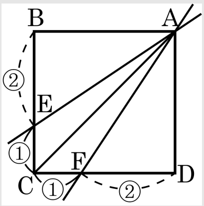
따라서 $m>0$이므로 $m=\frac{12}{5}$이다.

16. 두 함수 $y=x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$과 정사각형 ABCD에 대하여 점 A를 지나고 정사각형 ABCD의 넓이를 3등분하는 두 개의 직선의 기울기의 곱을 구하면?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설



위의 그림에서 A점의 x좌표를 구하면

$2a=\frac{3}{2}a^2$, $a=\frac{4}{3}$

$\therefore A\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{9}\right)$

정사각형의 넓이는 $(2a)^2=\frac{64}{9}$이므로 넓이가 삼등분되면 각 넓이는

$\frac{64}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{64}{27}$에서

$\frac{64}{27}=\frac{8}{3}\times②\times\frac{1}{2}$

$②=\frac{16}{9}$

직선 AF의 기울기는 $\dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{16}{9}}=\frac{3}{2}$

마찬가지 방법으로 AE의 기울기를 구하면 $\frac{2}{3}$

$\therefore$두 기울기의 곱은 $\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=1$

17. 이차함수 $y = \frac{1}{2}(x+a)^2 + b$ 의 그래프는 $x < -2$ 이면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하고, $x > -2$ 이면 x 의 값이 증가할 때, y 의 값도 증가한다. 이 그래프가 점 $(-1,\ 3)$ 을 지날 때, 꼭짓점의 좌표를 구하면?

① $(-2,\ 1)$ ② $(3,\ 5)$ ③ $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$
④ $(2,\ 5)$ ⑤ $\left(-1,\ \frac{2}{5}\right)$

해설

$x = -2$를 기준으로 x 값에 따른 y 값의 변화가 달라지므로, 축의 방정식은 $x = -2$, $\therefore a = 2$

$y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + b$ 의 그래프가 점 $(-1,\ 3)$ 을 지나므로 $3 = \frac{1}{2}(-1+2)^2 + b$, $\therefore b = \frac{5}{2}$

따라서 $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 + \frac{5}{2}$ 에서 꼭짓점의 좌표는 $\left(-2,\ \frac{5}{2}\right)$ 이다.

18. 점 (2, 10)을 지나고 꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -8)$인 이차함수의 그래프가 있다. 이 포물선과 직선 $y=-3$에 대하여 대칭인 포물선의 그래프의 x 절편의 x 좌표값을 각각 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ -8)$인 이차함수의 방정식은

$y=a(x+1)^2-8$이고 점 (2, 10)을 지나므로

$10=a(2+1)^2-8$

$\therefore\ a=2$

따라서 이차함수의 그래프는 $y=2(x+1)^2-8$

이 포물선과 직선 $y=-3$에 대하여 대칭인 포물선의 그래프는

꼭짓점의 좌표가 $(-1,\ 2)$ 이므로

$y=-2(x+1)^2+2$

이 그래프의 x 절편은 $y=0$일 때의 x의 값이므로

$-2x^2-4x=0$

$\therefore\ x=0,\ -2$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=4$

19. 이차함수 $y = x^2 - 4x + 5$과 $y = a(x-1)^2 + b$의 그래프가 서로의 꼭짓점을 지날 때, a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -1$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$의 꼭짓점은 $(2,\ 1)$
$y = a(x-1)^2 + b$의 꼭짓점은 $(1,\ b)$
$(1,\ b)$를 $y = x^2 - 4x + 5$에 대입하면 $b = 2$
$(2,\ 1)$을 $y = a(x-1)^2 + b$에 대입하면 $a = -1$
$\therefore\ a = -1,\ b = 2$

20. 이차함수 $y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 48$ 사이에 둘러싸인 도형 내부의 좌표 중, x, y좌표의 값이 모두 자연수인 점의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 170 개

해설

$y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프와 직선 $y = 48$ 이 만나는 두 점은 각각 $(-6,\ 48),\ (6,\ 48)$

둘러싸인 부분의 x 좌표의 범위는 $-6 \le x \le 6$ 이므로 이 범위 안의 자연수는 $1,\ 2,\ \cdots,\ 6$ 의 6 개가 있다.

(1) $y = 16$ 위에 있는 자연수인 점은 $(1,\ 16),\ (2,\ 16),\ \cdots (6,\ 16)$ 로 6 개가 있다.

(2) $y = \frac{4}{3}x^2$ 의 그래프 위에 있는 자연수인 점은 $(3,\ 12)(6,\ 48)$ 의 2 개가 있다.

따라서

x 좌표가 6 일 때 : 1 개

x 좌표가 5 일 때 :

y 좌표는 34 부터 48 까지이므로 15 개

x 좌표가 4 일 때 :

y 좌표는 22 부터 48 까지이므로 27 개

x 좌표가 3 일 때 :

y 좌표는 12 부터 48 까지이므로 37 개

x 좌표가 2 일 때 :

y 좌표는 6 부터 48 까지이므로 43 개

x 좌표가 1 일 때 :

y 좌표는 2 부터 48 까지이므로 47 개

$\therefore\ 1 + 15 + 27 + 37 + 43 + 47 = 170$ (개)

21. 직선 $y = 1 - x$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, 포물선 $y = ax^2$, $y = bx^2$ 의 그래프와 1 사분면에서 만나는 점을 각각 C, B, y 축과 만나는 점을 D 라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{CB}}$ 가 되기 위한 상수 a, b 의 값을 구하여라. (단, $a > b > 0$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 12$

▷ 정답 : $b = \frac{4}{9}$

해설

$\mathrm{A}(1.0)$, $\mathrm{D}(0,\ 1)$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{CB}}$ 이므로

$\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$, $\mathrm{C}\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$

$y = bx^2$ 가 $\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ 를 지나므로 $b = \frac{4}{9}$

$y = ax^2$ 가 $\mathrm{C}\left(\frac{1}{4},\ \frac{3}{4}\right)$ 를 지나므로 $a = 12$

$\therefore\ a = 12,\ b = \frac{4}{9}$

22. 이차함수 $y = -\frac{2}{3}(x-2)^2$ 의 그래프와 직선 $y = -6$ 과의 두 교점 A, B와 x 축 위의 두 점 $\mathrm{C}(-2,\ 0)$, $\mathrm{D}(p,\ 0)$ 을 연결한 사각형이 평행사변형일 때, 상수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = -\frac{2}{3}(x-2)^2$ 의 그래프와 직선 $y = -6$ 과의 두 교점 A, B는

$-6 = -\frac{2}{3}(x-2)^2$ 에서 $x = 5,\ -1$ 이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = 6$

□ABCD는 평행사변형이므로 마주 보는 두 변의 길이가 같다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{CD}} = 6$ 이다.

점 C의 좌표가 $(-2,\ 0)$ 이므로 점 D의 좌표는 $(4,\ 0)$ 이다.

$\therefore\ p = 4$

23. 이차함수 $y = 3x^2 + 6kx + 4k^2 - 3k - 18$ 의 그래프의 꼭짓점이 제 4 사분면 위에 있을 때, k 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 < k < 0$

해설

$$\begin{aligned} y &= 3x^2 + 6kx + 4k^2 - 3k - 18 \\ &= 3(x+k)^2 - 3k^2 + 4k^2 - 3k - 18 \\ &= 3(x+k)^2 + k^2 - 3k - 18 \end{aligned}$$

꼭짓점은 $(-k,\ k^2 - 3k - 18)$

이때, 꼭짓점이 제 4 사분면 위에 있으므로

$-k > 0 \qquad \therefore\ k < 0$

$k^2 - 3k - 18 < 0$

$(k+3)(k-6) < 0$

$\therefore\ -3 < k < 6$

따라서 $-3 < k < 0$ 이다.

24. 이차함수 $y=(x-2)(x+k^2)$ $(k>0)$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점과 양의 x 절편 그리고 직선 $y=x+2$ 가 y 축과 만나는 점을 연결한 삼각형의 외심 O 의 y 좌표가 -5 일 때, k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{6}$

해설

포물선이 y 축과 만나는 점은 $(0,\ -2k^2)$ 이고 직선의 y 절편은 $(0,\ 2)$ 이고, 양의 x 절편은 $(2,\ 0)$ 이다.

외심 O 의 y 좌표가 -5 이므로 $\dfrac{2-2k^2}{2}=-5$

$\therefore\ k=\pm\sqrt{6}$

따라서 $k>0$ 이므로 $k=\sqrt{6}$ 이다.

25. $f(-3)=15,\ f(x^2)\cdot(x^2+x+3)=f(x)$ 를 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(-9)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{125}{93}$

해설

$f(x^2)\cdot(x^2+x+3)=f(x)$ 에서 $x=-3$ 을 대입하면 $9f(9)=f(-3)=15$

$\therefore\ f(9)=\dfrac{5}{3}$

따라서

$f(x^2)\cdot(x^2+x+3)=f(x)$ 에서 $f(x^2)=\dfrac{f(x)}{(x^2+x+3)}$ 이고

$f(x^2)\cdot(x^2-x+3)=f(-x)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x^2)\cdot(x^2-x+3) \\ &= \frac{f(x)}{(x^2+x+3)}\cdot(x^2-x+3) \end{aligned}$$

이 식에 $x=9$ 를 대입하면

$f(-9)=\dfrac{\frac{5}{3}}{93}\times 75=\dfrac{125}{93}$ 이다.

26. 두 이차함수 $f(x) = x^2 + 4x + 2$, $g(x) = x^2 - 2$ 에 대하여 $h(x) = \dfrac{g(x+1)}{f(x)}$ 이라고 할 때, $h(1)h(2)h(3)\cdots h(30)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{511}$

해설

$f(x) = (x+2)^2 - 2, g(x) = x^2 - 2$ 이므로
$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동하면
$y = g(x)$ 의 그래프가 되므로
$\therefore\ g(x) = f(x-2)$
$\therefore h(1)h(2)h(3)\cdots h(30)$

$$= \frac{g(2)g(3)g(4)\cdots g(31)}{f(1)f(2)f(3)\cdots f(30)}$$

$$= \frac{f(0)f(1)f(2)\cdots f(29)}{f(1)f(2)f(3)\cdots f(30)}$$

$$= \frac{f(0)}{f(30)} = \frac{2}{1022} = \frac{1}{511}$$

27. 이차함수 $y=x^2-5x-6$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만난다고 한다. 이 때, 선분 AB 의 길이는?

① 1　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 7

해설

$y=x^2-5x-6$ 의 x 절편은 $y=0$ 대입

$x^2-5x-6=0, (x+1)(x-6)=0$

$\therefore\ x=-1,\ 6$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=6-(-1)=7$

28. $y=-x^2+6x+k$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나고, 두 교점 사이의 거리가 8일 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

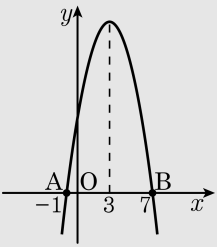
해설

$y=-x^2+6x+k$

$\quad=-(x^2-6x+9-9)+k$

$\quad=-(x-3)^2+9+k$

축의 방정식은 $x=3$



그림에서 보면 $\overline{AB}=8$이므로 A, B는 축 $x=3$에서 각각 4만큼 떨어져 있어야 한다.

따라서 A, B의 x좌표는 각각 $-1, 7$이다.

즉 x절편이 $-1, 7$이므로 식은 $y=-(x+1)(x-7)$

전개하면 $y=-x^2+6x+7 \quad \therefore k=7$

해설

x축과의 교점의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 $0=-x^2+6x+k$의 두 근이다.

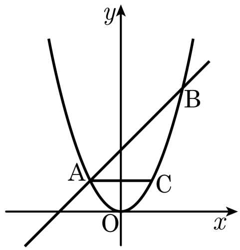
근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha+\beta=6, \alpha\beta=-k$

두 점 사이의 거리

$|\alpha-\beta|=8,\ |\alpha-\beta|^2=8^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$64=36+4k, 4k=28 \quad \therefore k=7$

29. 다음 그림과 같이 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$과 직선 $y = x + 4$의 교점을 A, B라 하고 삼각형 ABC의 넓이가 12가 되는 이차곡선 위의 한 점을 C라 하자. 점 C를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 2 등분하는 직선의 기울기를 구하여라. (단, 점 C는 1 사분면에 위치한다.)



▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

두 그래프의 교점을 구하면

$\frac{1}{2}x^2 = x + 4$, $x^2 - 2x - 8 = 0$ 이므로

교점 A, B 는 $(-2,\ 2)$, $(4,\ 8)$ 이다.

점 C 의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2\right)$ 이라 하면

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (2+8) \times 6 - \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\mathrm{a}^2\right)(\mathrm{a}+2)$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a^2 + 8\right)(4-a)$$
$$= -\frac{3}{2}a^2 + 3a + 12 = 12$$

$\therefore\ a = 2 (\because\ x > 0)$

따라서 점 C 의 좌표는 $(2,\ 2)$

점 C를 지나고 삼각형 ABC의 넓이를 2 등분하는 직선은 선분 AB의 중점인 $(1,\ 5)$를 지난다.

따라서 이 직선의 기울기는 -3이다.

30. 세 이차함수 $y=x^2-2x$, $y=x^2-6x+8$, $y=x^2-4x+2$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

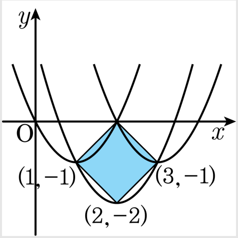
해설

$y=x^2-2x \quad \cdots ㉠$

$y=x^2-6x+8 \quad \cdots ㉡$

$y=x^2-4x+2 \quad \cdots ㉢$

그래프 ㉢은 그래프 ㉠과 그래프 ㉡의 꼭짓점을 지나고 세 이차함수의 그래프는 모양과 폭이 같으므로 세 이차함수의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times2=2$이다.

31. 이차함수 $y = -2x^2 - ax + 7$ 의 그래프가 점 $(1,\ 1)$ 을 지날 때의 설명으로 옳지 않은 것은?

① 직선 $x = -1$ 을 축으로 한다.

② 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 7)$ 이다.

③ $y = -2x^2 + 4x + 7$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.

④ x 축과 두 점에서 만난다.

⑤ y 축과의 교점의 좌표는 $(0,\ 7)$ 이다.

해설

$y = -2x^2 - ax + 7$ 의 그래프가 점 $(1,\ 1)$ 을 지나므로 $x = 1,\ y = 1$ 을 대입하면,

$-2 - a + 7 = 1 \therefore\ a = 4$

따라서 포물선의 식은 $y = -2x^2 - 4x + 7 = -2(x+1)^2 + 9$

① 축의 식은 $x = -1$

② 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ 9)$

③ y 축에 대칭인 그래프는 x 대신 $-x$ 를 대입하면 $y = -2x^2 + 4x + 7$

④ 그래프의 개형(대략적인 모양)을 그려보면 x 축과 두 점에서 만난다.

⑤ y 절편은 7 이고 y 축과의 교점의 좌표는 $(0,\ 7)$

32. 다음 보기 중 이차함수에 대한 설명이 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$는 $x = b$ 를 축으로 하고 점 $(0,\ a)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

㉡ $y = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ 에서 $|a|$ 의 값이 같으면 폭도 같다.

㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 좁아진다.

㉣ $y = -x^2$ 에서 $x < 0$ 일 때, x 값이 증가하면 y 값도 증가한다.

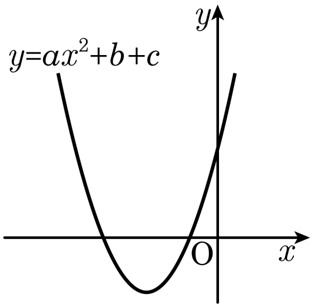
㉤ $y = ax^2$ 과 $y = -ax^2$ 의 그래프는 x 축에 대하여 대칭이다.

① ㉠,㉡,㉠　② ㉠,㉡,㉣　③ ㉠,㉡,㉤
④ ㉡,㉢,㉣　⑤ ㉡,㉣,㉤

해설

㉠ $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 은 $x = 0$을 축으로 하고 점 $(0,\ b)$ 를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.
㉢ $y = ax^2$ 에서 $a < 0$ 일 때, a 가 커지면 폭이 넓어진다.
따라서 옳은 것은 ㉡,㉣,㉤이다.

33. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?



① $a+b+c>0$ ② $a<0$ ③ $b>0$

④ $c<0$ ⑤ $a-b+c<0$

해설

아래로 볼록이므로 $a>0$

축의 방정식 $x=-\dfrac{b}{2a}<0$ 이므로 $b>0$

y 절편이 양수이므로 $c>0$

한편 $f(x)=ax^2+bx+c$ 라 하면

① $f(1)=a+b+c>0$

⑤ $f(-1)=a-b+c$: 판단할 수 없다.

34. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 세 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(-1,\ 4)$ 를 지날 때, 꼭짓점은 제 A 사분면 위에 있으며 제 B 사분면과 제 C 사분면을 지나지 않는다. $A + B + C$ 의 값을 구하면?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

주어진 세 점을 각각 $y = ax^2 + bx + c$ 에 대입한다.
점 $(0,\ 1)$ 을 대입하면 $c = 1$
점 $(1,\ 2)$ 를 대입하면 $a + b + 1 = 2$
즉, $a + b = 1 \cdots\cdots$ ㉠
점 $(-1,\ 4)$ 를 대입하면 $a - b + 1 = 4$
즉, $a - b = 3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠+ ㉡에서 $2a = 4$
$\therefore a = 2$, $b = -1$

$$\begin{aligned} \therefore y &= 2x^2 - x + 1 \\ &= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}\right) + 1 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \end{aligned}$$

따라서, 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)$ 이므로 꼭짓점의 좌표는 제 1사분면 위에 있으며 $a > 0$ 이므로 아래로 볼록 즉, 제 1, 2 사분면을 지난다.
따라서 $A = 1, B = 3, C = 4$ 이므로 $A + B + C = 1 + 3 + 4 = 8$ 이다.

35. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = x^2 + cx + d$ 가 두 점 $(1,\ a+b)$, $(-3,\ -3a+b)$ 에서 만날 때, 함수 $h(x) = g(x) - f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

두 함수의 그래프의 교점의 x 좌표가 1 과 -3 이므로 $ax + b = x^2 + cx + d$,

즉, $x^2 + (c-a)x + (d-b) = 0$ 은 두 근이 $1, -3$ 이다.

근과 계수의 관계에 의해

$a - c = -2$, $d - b = -3$

$$\begin{aligned} \therefore\ h(x) &= g(x) - f(x) \\ &= x^2 + (c-a)x + (d-b) \\ &= x^2 + 2x - 3 \\ &= (x+1)^2 - 4 \end{aligned}$$

따라서 $x = -1$ 일 때, 최솟값 -4 를 갖는다.

36. 좌표평면 위의 두 점 $A(0,\ 2)$, $B(-4,\ 3)$ 와 직선 $y=1$ 위의 한 점 P 에 대하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

점 P 의 좌표를 $(a,\ 1)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2 &= (a^2+1)+\left\{(a+4)^2+4\right\}\\ &= 2a^2+8a+21\\ &= 2(a+2)^2+13\end{aligned}$$

따라서 $a=-2$ 일 때, 최솟값은 13 이다.

37. 함수 $y = x^2 - px$ 와 $y = -x^2 + px$ 의 그래프에 의하여 둘러싸인 부분에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값이 26 일 때, p 의 값을 구하여라. (단, $p > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

포물선의 축이 $x = \frac{p}{2}$ 이므로 직사각형은 직선 $x = \frac{p}{2}$ 에 대하여 대칭이다.

직사각형이 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 t $\left(t > \frac{p}{2}\right)$ 라 하면

가로의 길이는 $2 \times \left(t - \frac{p}{2}\right) = 2t - p$,

세로의 길이는 $(-t^2 + pt) - (t^2 - pt) = -2t^2 + 2pt$

이므로 직사각형의 둘레의 길이는

$2(-2t^2 + 2pt + 2t - p) = -4\left(t - \frac{p+1}{2}\right)^2 + p^2 + 1$ 이다.

따라서 $t = \frac{p+1}{2}$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은

$p^2 + 1 = 26$ 이므로 $p = 5$ 이다.

38. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최댓값 3 을 갖고 제2 사분면을 지나지 않는다고 할 때, a의 값의 범위는?

① $a \geq -\frac{3}{4}$　　② $a \leq -\frac{3}{4}$　　③ $a \leq \frac{3}{4}$

④ $a \leq 3$　　⑤ $a \geq -3$

해설

$y = a(x-2)^2 + 3(a < 0)$

$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$

$(y\text{절편}) \leq 0, 4a + 3 \leq 0$

$\therefore\ a \leq -\frac{3}{4}$

39. 이차함수 $y = -2x^2 - 4(k-1)x + 3k$ 의 최댓값을 K라 할 때, K 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{15}{8}$

해설

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 - 4(k-1)x + 3k \\ &= -2\left\{x^2 + 2(k-1)x + (k-1)^2\right\} + 2(k-1)^2 + 3k \\ &= -2\left\{x + (k-1)\right\}^2 + 2(k-1)^2 + 3k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore K &= 2(k-1)^2 + 3k \\ &= 2k^2 - k + 2 \\ &= 2\left(k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{16}\right) + \frac{15}{8} \\ &= 2\left(k - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8} \end{aligned}$$

따라서 K 의 최솟값은 $\dfrac{15}{8}$ 이다.

40. 이차함수 $y = x^2 + kx - 2k$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, m 의 최댓값과 그 때의 k 의 값을 각각 차례대로 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $m = 4$

▷ 정답 : $k = -4$

해설

$$y = \left(x + \frac{1}{2}k\right)^2 - 2k - \frac{1}{4}k^2$$

$$\therefore m = -2k - \frac{1}{4}k^2 = -\frac{1}{4}(k + 4)^2 + 4$$

따라서 m 의 최댓값은 4 , $k = -4$ 이다.

41. $0 \le \frac{p}{2} \le 1$, $2p - q \le 3$ 를 만족하는 실수 p, q 에 대하여 이차함수 $y = -x^2 + px + q$ $(0 \le x \le 1)$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

$$y = -x^2 + px + q = -\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + q + \frac{p^2}{4}$$

이때, $0 \le \frac{p}{2} \le 1$ 이고 $0 \le x \le 1$ 이므로

최댓값 M 은 $x = \frac{p}{2}$ 일 때이다.

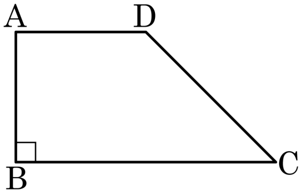
$$\therefore\ M = q + \frac{p^2}{4}$$

또한 $2p - q \le 3$ 에서 $q \ge 2p - 3$

$$\therefore\ M \ge \frac{p^2}{4} + 2p - 3 = \frac{1}{4}(p+4)^2 - 7$$

따라서 M 의 최솟값은 -7 이다.

42. 다음 그림의 사다리꼴 ABCD 에서 $\angle B = 90°$, $\angle C = 45°$, $\overline{AB} + \overline{BC} = 18$ 일 때, 이 사다리꼴의 최대 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

꼭짓점 D 에서 변 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하고, 변 AB 의 길이를 x 라 하면 $\triangle DHC$ 는 이등변삼각형이고 변 BC 의 길이는 $18 - x$ 이다.

$\overline{AB} = \overline{DH} = \overline{HC} = x$

$\overline{AD} = \overline{BH} = 18 - x - x = 18 - 2x$

사다리꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left\{(18 - 2x) + (18 - x)\right\} \times x \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 18x \\ &= -\frac{3}{2}(x - 6)^2 + 54 \end{aligned}$$

따라서 $x = 6$ 일 때, 사다리꼴 넓이의 최댓값은 54 이다.

43. 가을 전어철을 맞아 전어의 어획량은 매일 현재 어획량의 10% 씩 늘어나고, 마리당 판매 가격은 매일 현재 가격의 5% 씩 줄어들고 있다. 며칠 후에 전어를 한꺼번에 팔아야 최대의 수입을 얻을 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 일

▷ 정답 : 5 일

해설

현재의 전어의 양과 가격을 각각 m 마리, p 원 라고 할 때, x 일 후의 전어의 양과 가격은 각각

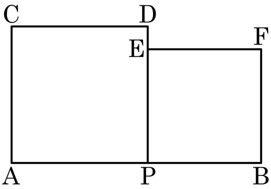
$m\left(1+\frac{1}{10}x\right)$ 마리, $p\left(1-\frac{1}{20}x\right)$ 원 이다.

이때, x 일 후의 수입을 y 원이라고 하면

$$
\begin{aligned}
y &= mp\left(1+\frac{1}{10}x\right)\left(1-\frac{1}{20}x\right) \\
&= mp\left(1+\frac{1}{20}x-\frac{1}{200}x^2\right) \\
&= -\frac{mp}{200}(x^2-10x-200) \\
&= -\frac{mp}{200}(x-5)^2+\frac{9}{8}mp
\end{aligned}
$$

따라서 $x=5$ 일 때, y 는 최댓값을 가지므로 5 일 후에 팔면 최대의 수입을 얻을 수 있다.

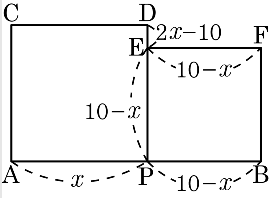
44. 다음 그림과 같이 길이가 10 인 선분 AB 위의 한 점 P 에서 같은 방향으로 정사각형 APDC , 정사각형 PBFE 를 그릴 때, $\overline{\mathrm{DE}}^2 + \overline{\mathrm{EF}}^2$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

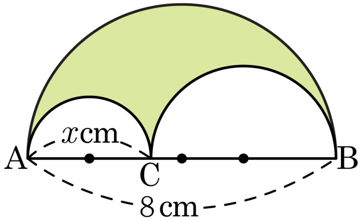


$\overline{\mathrm{AP}} = x$ 라 하면 위의 그림과 같다.

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{DE}}^2 + \overline{\mathrm{EF}}^2 &= (2x-10)^2 + (10-x)^2 \\ &= 5x^2 - 60x + 200 \\ &= 5(x-6)^2 + 20\end{aligned}$$

따라서 $x = 6$ 일 때, 최솟값이 20 이다.

45. 다음 그림과 같이 세 개의 반원으로 이루어진 도형이 있다. $\overline{AB}$ 의 길이가 8cm 이고 색칠한 부분의 넓이가 $y\pi \text{cm}^2$ 일 때, y 의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\overline{AC} = x\text{cm}$ 이므로 $\overline{BC} = (8 - x)\text{cm}$ 이다.
따라서 색칠한 부분의 넓이 S 는
(전체 반원의 넓이 - 작은 두 반원의 넓이의 합) 이다.

$$\frac{1}{2} \times 4^2\pi - \left\{\frac{1}{2}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8-x}{2}\right)^2\right\} = y\pi$$

$$8\pi - \left(\frac{x^2}{8}\pi + \frac{64 - 16x + x^2}{8}\pi\right) = y\pi$$

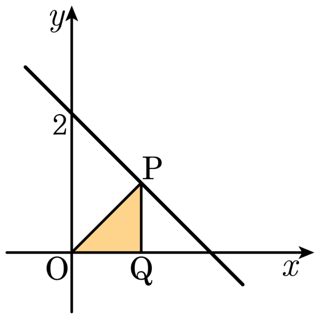
$$8\pi - \left(\frac{2x^2 - 16x + 64}{8}\right)\pi = y\pi$$

$$-\frac{1}{4}x^2\pi + 2x\pi = y\pi$$

$$\begin{aligned} y\pi &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 8x) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x^2 - 8x + 16 - 16) \\ &= -\frac{1}{4}\pi(x - 4)^2 + 4\pi \text{이다.} \end{aligned}$$

따라서 두 원의 반지름이 각각 4 cm 일 때, 넓이는 최댓값 4π cm 를 갖는다.

46. 다음 그림과 같이 직선 $y=-x+2$ 위의 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q, $\triangle$POQ 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제1 사분면 위의 점이다.)



▶ **답 :**

▷ **정답 :** $\frac{1}{2}$

해설

점 P 의 좌표는 $(a, -a+2)$ 라 하고,
$\triangle$POQ 의 넓이를 y 라 하면

$$y=\frac{1}{2}a(-a+2)$$

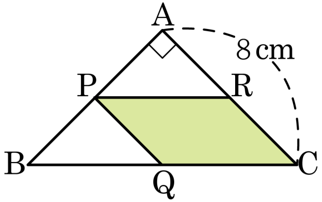
$$y=-\frac{1}{2}a^2+a=-\frac{1}{2}(a^2-2a)$$

$$=-\frac{1}{2}(a^2-2a+1-1)$$

$$=-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}$$

따라서 최댓값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

47. 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형 ABC 의 $\overline{AB}$ 위에 점 P 를 잡고, 점 P 에서 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 와 평행한 직선을 그어 $\overline{BC}, \overline{AC}$ 와 만나는 점을 각각 Q, R 라 한다. □PQCR 의 넓이가 최대가 될 때, $\overline{BP}$ 의 길이를 구하면?



① 1cm ② 2cm ③ 3cm ④ 4cm ⑤ 5cm

해설

$\overline{BP} = x$ 라 놓으면

$$\square PQCR = \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle PBQ)$$
$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 8 - \left\{\frac{1}{2} \times (8-x)^2 + \frac{1}{2}x^2\right\}$$
$$= 32 - (x^2 - 8x + 32)$$
$$= -x^2 + 8x = -(x-4)^2 + 16$$

따라서 $\overline{BP} = 4\text{cm}$ 일 때, □PQCR 의 넓이가 최대가 된다.