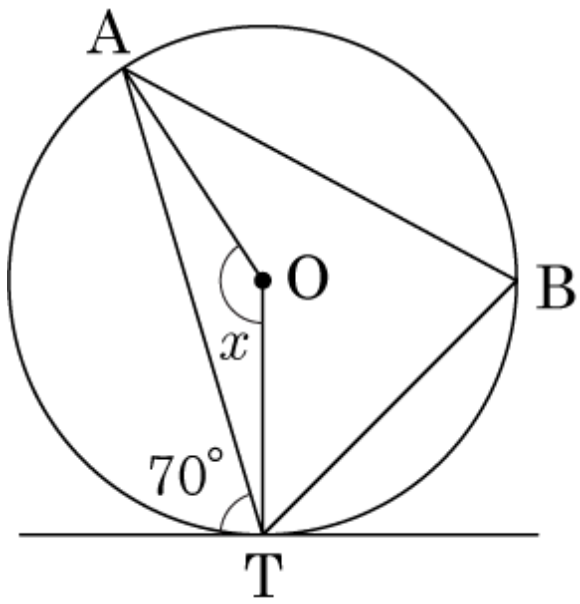
1. 다음 그림에서 점 T가 원 O의 접점일 때, $\angle x$의 크기는?



① $110°$ ② $120°$ ③ $130°$

④ $140°$ ⑤ $150°$

해설

$\angle ABT = 70°$

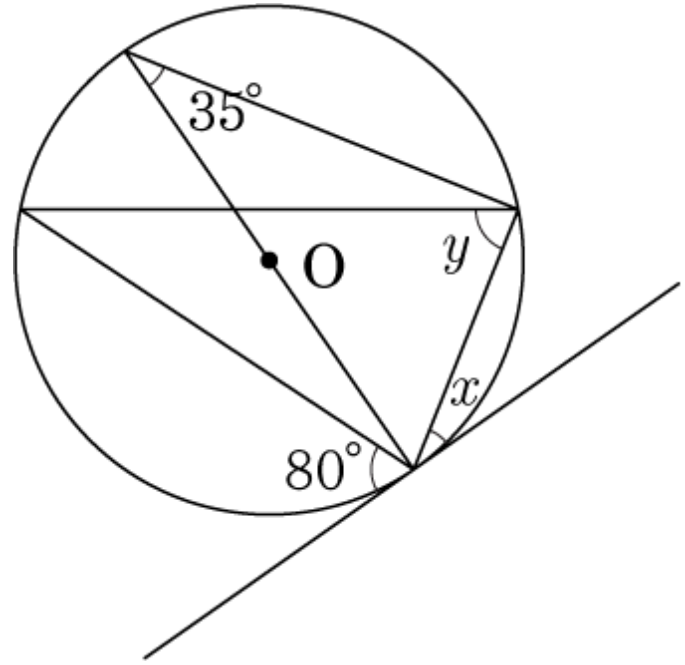
$\angle AOT = 2\angle ABT$

$\therefore\ x = 140°$

2. 다음 그림에서 $\angle x + \angle y$ 의 크기는?

① 95° ② 105° ③ 115°

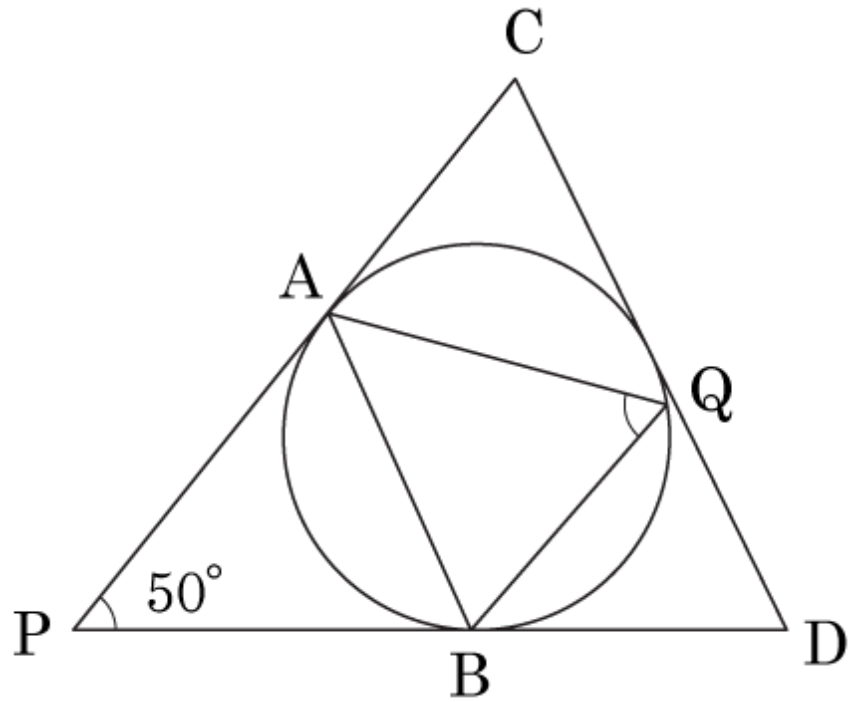
④ 120° ⑤ 130°



해설

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로 $\angle x = 35^\circ$, $\angle y = 80^\circ$

3. 다음 그림에서 $\overline{PA}, \overline{PB}$ 가 접선일 때, $\angle AQB$ 의 크기는?



① $65°$ ② $60°$ ③ $55°$ ④ $45°$ ⑤ $40°$

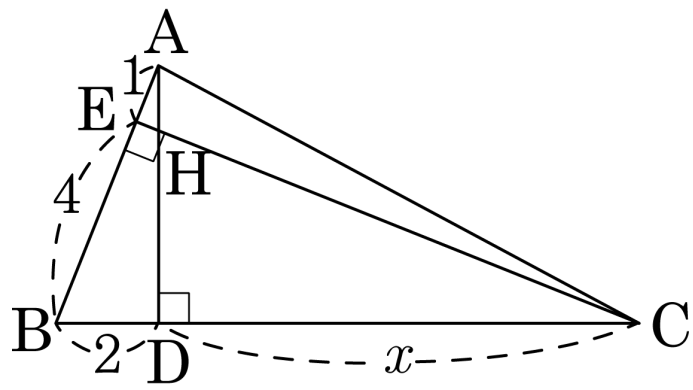
해설

$\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $\angle ABP = 65°$

또한, 접선과 현이 이루는 각의 크기는 그 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같으므로

$\angle ABP = \angle AQB = 65°$ 이다.

4. 다음 그림에서 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ 이고 점 H 는 $\overline{AD}$ 와 $\overline{CE}$ 의 교점이다. $\overline{AE} = 1$, $\overline{EB} = 4$, $\overline{BD} = 2$ 일 때, $\overline{DC}$ 의 길이는?



① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

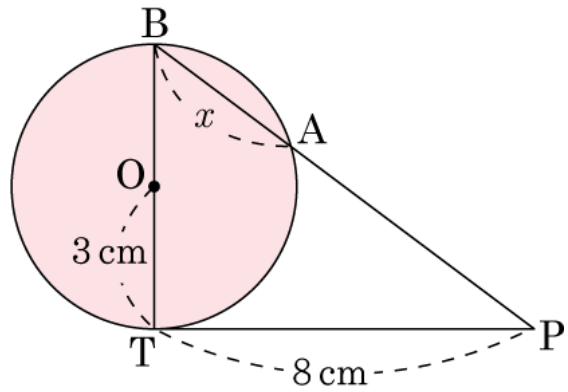
$\angle AEC = \angle ADC = 90^\circ$ 이므로

$\square AEDC$ 는 원에 내접한다.

$4 \times (4+1) = 2 \times (2+x)$, $20 = 4 + 2x$

$\therefore \quad x = 8$

5. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 는 반지름의 길이가 3cm 인 원 O 의 접선이고 $\overline{PT} = 8\text{cm}$ 일 때, x 의 값은?



① 3.6cm ② 3.7cm ③ 3.8cm

④ 3.9cm ⑤ 4cm

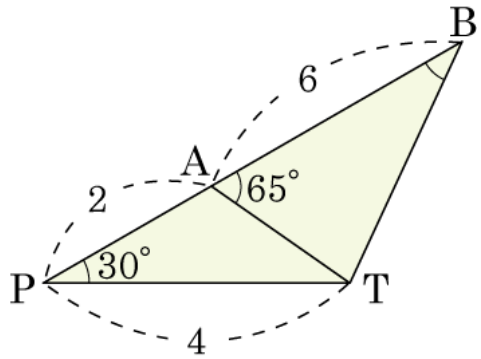
해설

$\angle BTP = 90°$, $\overline{BP} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$8^2 = (10 - x) \times 10$

$\therefore\ x = 3.6$

6. 다음 그림에서 $\overline{PA} = 2$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{PT} = 4$ 이고 $\angle APT = 30°$, $\angle BAT = 65°$ 이다. 이 때, $\angle PBT$ 의 크기는?



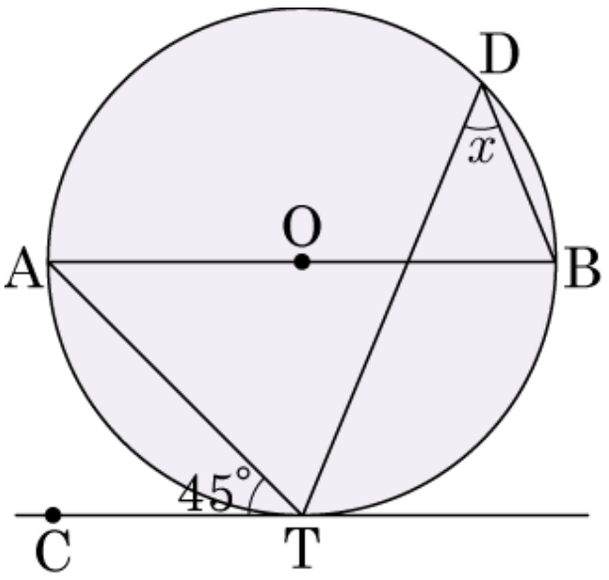
① 30° ② 35° ③ 40° ④ 45° ⑤ 50°

해설

$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB} \Rightarrow 4^2 = 2 \times 8$ 이 성립하므로 $\overline{PT}$ 는 원의 접선이다.

따라서, $\angle ABT = \angle ATP = 65° - 30° = 35°$ 이다.

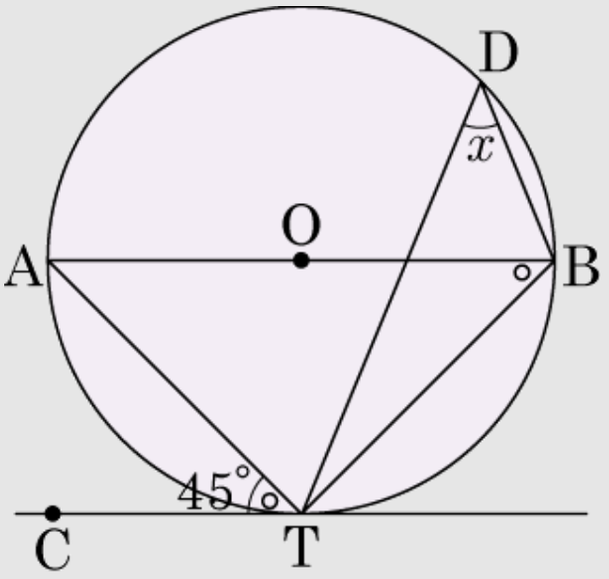
7. 다음 그림에서 x의 값은?



① 30° ② 45° ③ 50° ④ 60° ⑤ 65°

해설

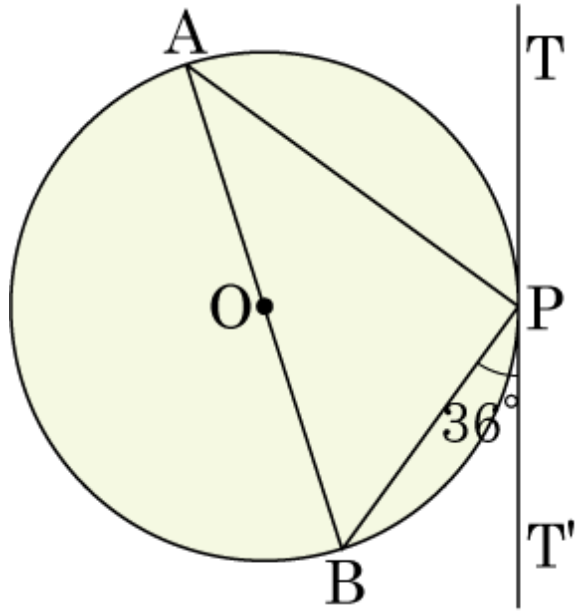
점 B와 T에 보조선을 그으면



$\angle ATB = 90°$ 이고 $\angle ABT = \angle ATC = 45°$ 이므로

$\angle A = 45°,\ \angle x = \angle A = 45°$

8. 다음 그림에서 $\overline{AB}$ 는 원 O 의 지름이고 $\overleftrightarrow{TT'}$ 는 접선이다. $5.0\text{pt}\overset{\frown}{AP} : 5.0\text{pt}\overset{\frown}{BP}$ 를 간단한 정수의 비로 나타낸 것은?



① 1 : 2 ② 2 : 3 ③ 2 : 1

④ 3 : 2 ⑤ 3 : 4

해설

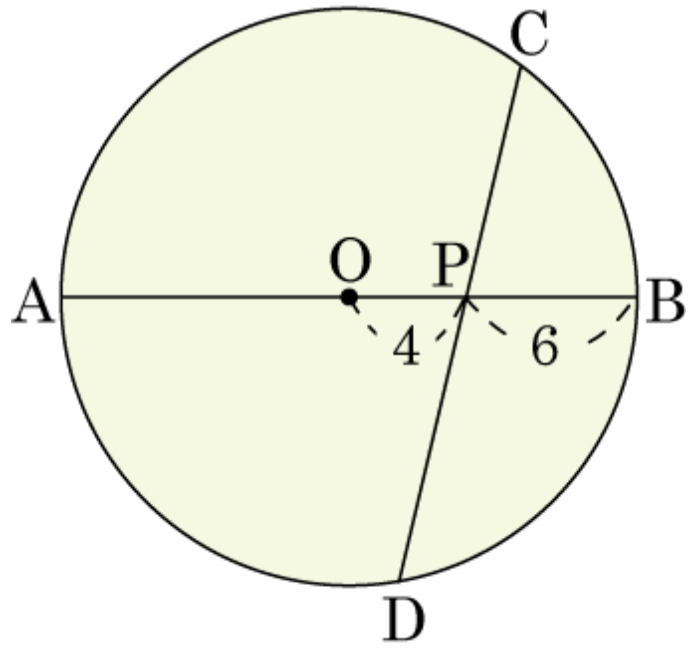
$\angle OAP = 36°$

점 O와 P를 이으면, $\triangle OAP$는 이등변삼각형이므로 $\angle BOP = 72°$, $\angle AOP = 108°$

호의 길이는 원주각의 크기에 정비례하므로

$\therefore\ 5.0\text{pt}\overset{\frown}{AP} : 5.0\text{pt}\overset{\frown}{BP} = 108 : 72 = 3 : 2$

9. 다음 그림에서 $\overline{AB}$ 는 원 O 의 지름이고 $\overline{BP} = 6$, $\overline{OP} = 4$ 이다. $\overline{CP} : \overline{DP} = 2 : 3$ 일 때, $\overline{DP}$ 의 길이는?



① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $3\sqrt{14}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$\overline{CP} : \overline{DP} = 2 : 3$ 이므로

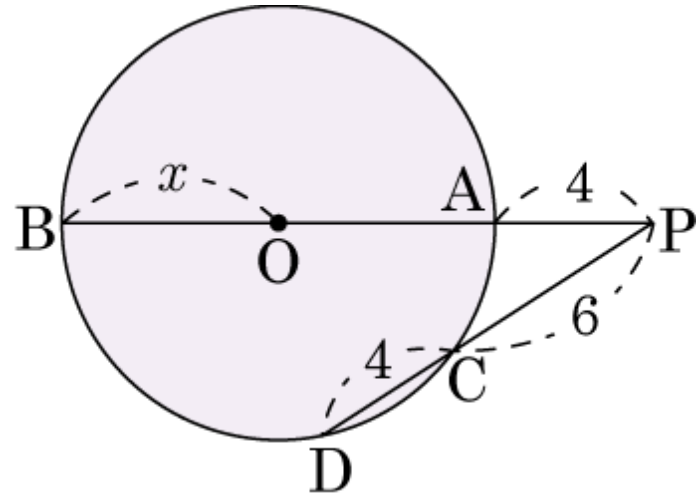
$\overline{CP} = 2k$, $\overline{DP} = 3k$ 라 하면

$\overline{PC} \times \overline{PD} = \overline{PA} \times \overline{PB}$ 에 의하여

$2k \times 3k = 14 \times 6$ $\therefore\ k = \sqrt{14}$

따라서 $\overline{DP} = 3\sqrt{14}$ 이다.

10. 다음 그림에서 x 의 값은?



① 4.5 ② 5 ③ 5.5 ④ 6 ⑤ 6.5

해설

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=x$ 이고

$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PC}}\cdot\overline{\mathrm{PD}}$ 이므로

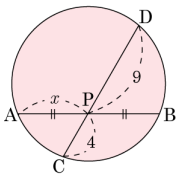
$4(4+x+x)=6(6+4)$

$16+8x=60$, $8x=44$

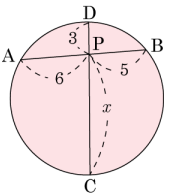
$\therefore x=\dfrac{44}{8}=5.5$

11. 다음 그림에서 x 의 값이 다른 것은?

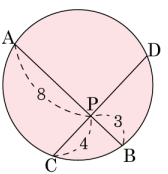
①



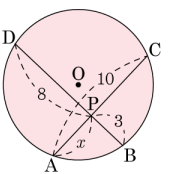
②



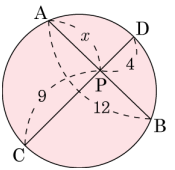
③



④



⑤



해설

① $x^2 = 4 \times 9 \therefore x = 6$

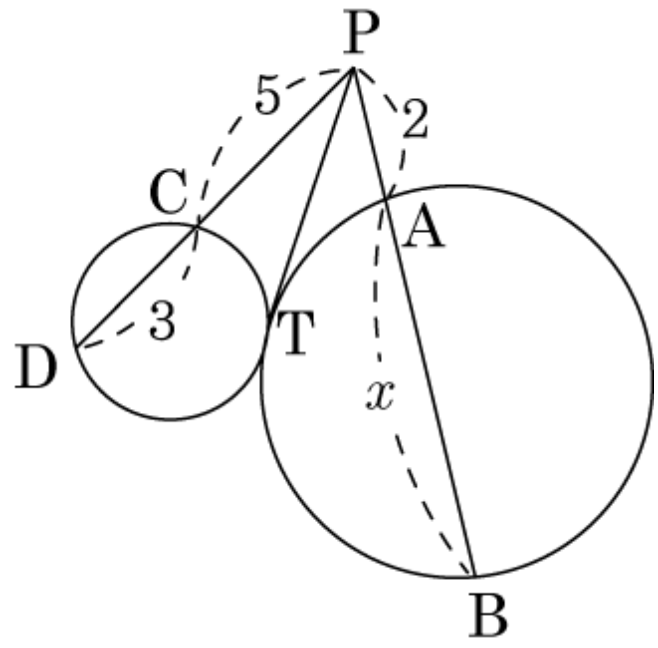
② $6 \times 5 = 3 \times x \therefore x = 10$

③ $8 \times 3 = 4 \times x \therefore x = 6$

④ $x(10 - x) = 3 \times 8$ $x = 4, 6(\overline{AP} > \overline{BP})$ $\therefore x = 6$

⑤ $x(12 - x) = 4 \times 9 \therefore x = 6$

12. 다음 그림과 같이 $\overline{PT}$ 가 두 원의 접선일 때, x 의 값은?



① 18 ② 19 ③ 20

④ 21 ⑤ 22

해설

$\overline{PT^2} = \overline{PA} \times \overline{PB} \cdots ㉠$

$\overline{PT^2} = \overline{PC} \times \overline{PD} \cdots ㉡$

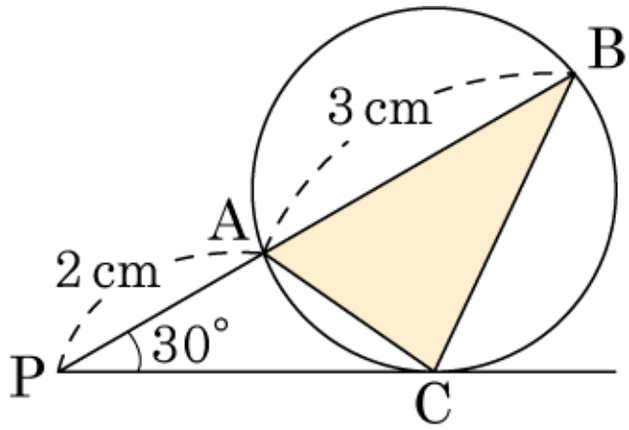
㉠, ㉡에서 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$이므로

$2(2+x) = 5 \times 8,\ 4 + 2x = 40$

$2x = 36$

$\therefore x = 18$

13. 다음 그림에서 $\overrightarrow{PC}$ 는 원의 접선이고 $\angle BPC = 30°$, $\overline{PA} = 2\,\text{cm}$, $\overline{AB} = 3\,\text{cm}$ 일 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① $\frac{\sqrt{10}}{2}\,\text{cm}^2$ ② $\frac{\sqrt{11}}{2}\,\text{cm}^2$

③ $\frac{\sqrt{10}}{4}\,\text{cm}^2$ ④ $\frac{3\sqrt{11}}{2}\,\text{cm}^2$

⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{4}\,\text{cm}^2$

해설

$\overline{PC}^2 = 2 \times 5 = 10$ $\therefore$ $\overline{PC} = \sqrt{10}\,\text{cm}$

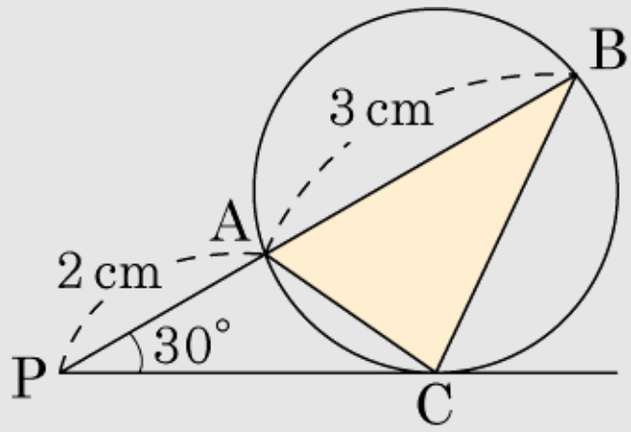
$\therefore$ $\triangle ABC$

$= \triangle PBC - \triangle PAC$

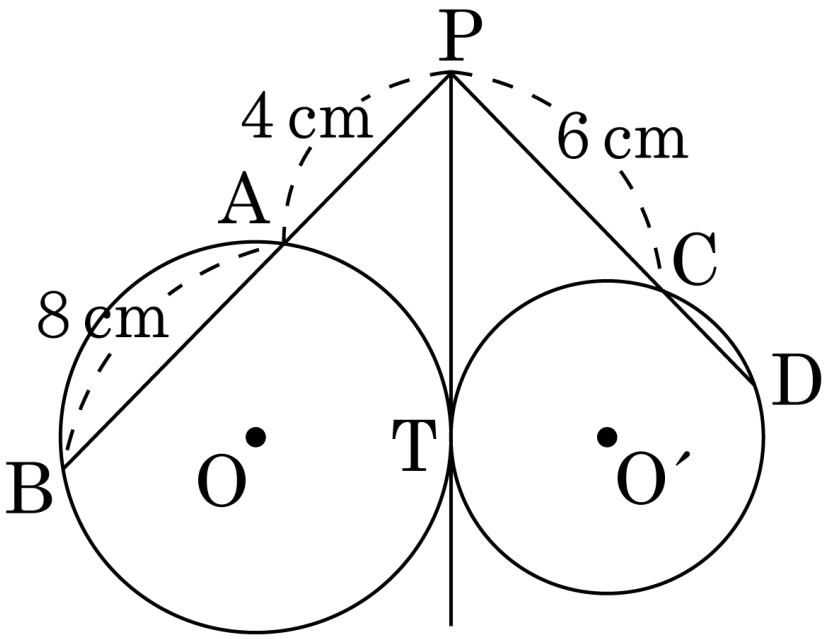
$= \frac{1}{2} \times 5 \times \sqrt{10} \times \sin 30° - \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{10} \times \sin 30°$

$= \frac{5\sqrt{10}}{4} - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$= \frac{3\sqrt{10}}{4}\ (\text{cm}^2)$



14. 다음 그림에서 두 원이 한 점 T 에서 접하고 $\overrightarrow{PT}$ 가 두 원의 공통인 접선일 때, $\overline{PT} \times \overline{CD}$ 의 값은?



① $6\sqrt{3}$ ② $7\sqrt{3}$ ③ $8\sqrt{3}$ ④ $9\sqrt{3}$ ⑤ $10\sqrt{3}$

해설

$\overline{PT^2} = \overline{PA} \times \overline{PB} = 4 \times 12 = 48$

$\therefore \overline{PT} = 4\sqrt{3}$

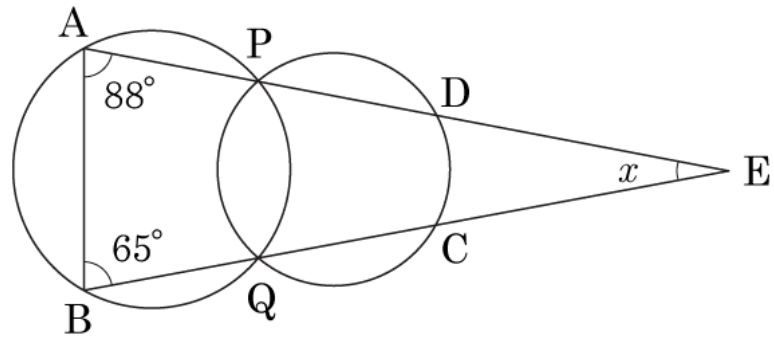
$\overline{PT^2} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

$48 = 6 \times (6 + \overline{CD})$

$\overline{CD} = 8 - 6 = 2$

$\therefore \overline{PT} \times \overline{CD} = 4\sqrt{3} \times 2 = 8\sqrt{3}$

15. 다음 그림에서 두 원은 두 점 P, Q 에서 만나고, $\angle PAB = 88°$, $\angle QBA = 65°$ 일 때, $\angle x$ 의 크기는?



① 17° ② 20° ③ 27° ④ 30° ⑤ 37°

해설

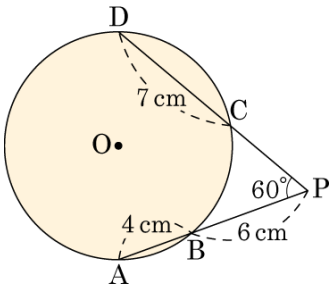
보조선 CD , PQ 를 연결하면 내접하는 사각형의 성질에 의해

$\angle ABQ = \angle QPD = \angle DCE = 65°$

$\angle BAP = \angle PQC = \angle CDE = 88°$

따라서 $\angle x = 180° - 65° - 88° = 27°$ 이다.

16. 다음 그림과 같이 원 O 밖의 한 점 P 에서 원에 그은 두 직선이 원과 만나서 생기는 현을 각각 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ 라고 하자. $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\overline{CD} = 7\text{cm}$, $\overline{PB} = 6\text{cm}$, $\angle APD = 60°$ 일 때, 원 O 의 넓이는?

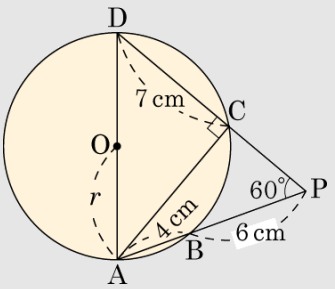


① $21\pi\,\text{cm}^2$ ② $21\sqrt{3}\pi\,\text{cm}^2$ ③ $31\pi\,\text{cm}^2$

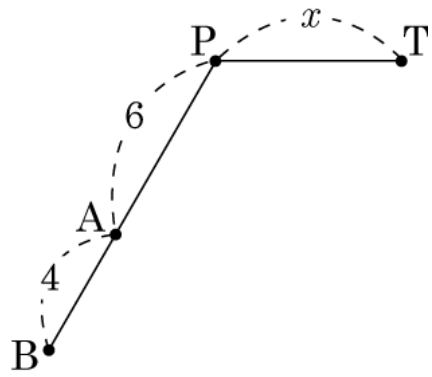
④ $31\sqrt{2}\pi\,\text{cm}^2$ ⑤ $41\pi\,\text{cm}^2$

해설

원에서의 비례 관계에 의하여
$\overline{PD}\cdot\overline{PC} = \overline{PA}\cdot\overline{PB}$ ($\overline{PC} = x$)
이므로
$(x+7)\times x = 10\times 6$
$x^2 + 7x - 60 = 0$
$(x+12)(x-5) = 0$
$\therefore\ x = 5\,\text{cm} = \overline{PC}$
$\overline{AC}$, $\overline{AD}$ 를 그으면 $\overline{AP} = 2\overline{PC}$,
$\angle APC = 60°$ 이므로 $\angle ACP = 90°$ ($\because$ 특수각의 성질)
즉, $\overline{AD}$ 가 원의 지름이다.
$\overline{AC} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}(\,\text{cm})$ 이므로
$\triangle ACD$ 에서 $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CD}^2$
$4r^2 = 75 + 49$
$\therefore\ r = \sqrt{31}\,\text{cm}$
따라서, 원의 넓이는 $\pi r^2 = 31\pi(\,\text{cm}^2)$ 이다.



17. 다음 그림에서 $\overline{PT}$ 가 세 점 A, B, T 를 지나는 원의 접선이 되도록 하는 x 의 값은?

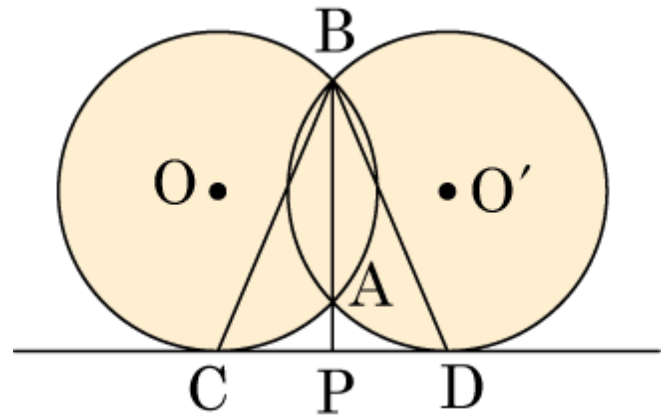


① $2\sqrt{15}$ ② $3\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $6\sqrt{2}$

해설

$x^2 = 6 \times 10 \quad \therefore x = 2\sqrt{15}$

18. 다음 그림과 같이 두 원 O, O′의 공통외접선 CD와 공통현 AB의 연장선이 점 P에서 만난다. $\overline{PA} = 1\text{cm}$, $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\overline{BC} = \overline{BD} = \sqrt{30}\text{cm}$일 때, $\triangle CBD$의 넓이는?



① $10\,\text{cm}^2$ ② $5\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ ③ $6\sqrt{2}\,\text{cm}^2$

④ $5\sqrt{5}\,\text{cm}^2$ ⑤ $2\sqrt{6}\,\text{cm}^2$

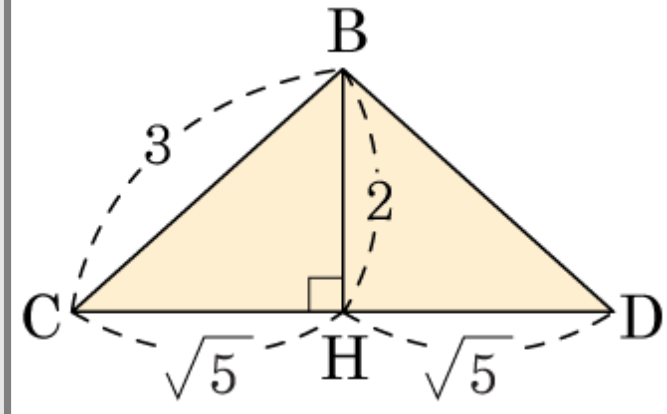
해설

$\overline{CP}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB} = 5$

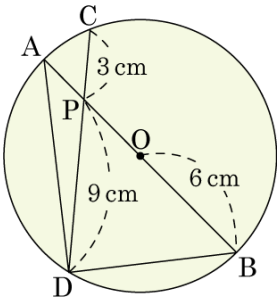
$\overline{CP} = \sqrt{5}\,\text{cm}$

$\therefore \overline{CD} = 2\overline{CP} = 2\sqrt{5}\,\text{cm}$

$\therefore \triangle CBD = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 5 = 5\sqrt{5}(\text{cm}^2)$



19. 다음 그림에서 원 O 의 지름 AB 와 현 CD 의 교점을 P 라 한다. $\overline{OB} = 6\text{cm}$, $\overline{PC} = 3\text{cm}$, $\overline{PD} = 9\text{cm}$ 일 때, $\overline{AD} = a$, $\overline{BD} = b$, $\overline{PO} = x$, $x = b - a$ 일 때, $2ab$ 를 구하면?

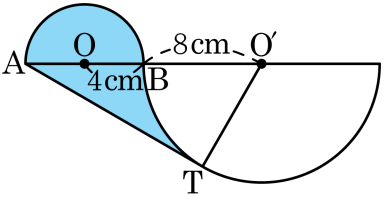


① -135 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 144

해설

$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ 이므로
따라서 $(6 - x)(6 + x) = 3 \times 9$
$36 - x^2 = 27,\ x^2 = 9$
$\therefore\ x = b - a = 3\ (\text{cm})\ (\because\ x > 0)$
$\angle ADB = 90°$ 이므로
$a^2 + b^2 = 12^2$
$b - a = 3$ 의 양변을 제곱하면
$(b - a)^2 = 3^2$
$a^2 - 2ab + b^2 = 9$
$144 - 2ab = 9\ (\because\ a^2 + b^2 = 144)$
$-2ab = -135$
$\therefore\ 2ab = 135$

20. 다음 그림에서 두 반원 O, O′ 의 반지름의 길이는 각각 4 cm, 8 cm 이다. $\overline{AT}$ 가 반원 O′ 의 접선일 때, 색칠한 부분의 넓이는?



① $32\sqrt{3}\,\text{cm}^2$
② $(8\pi + 32\sqrt{3})\,\text{cm}^2$
③ $\left(32\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi\right)\,\text{cm}^2$
④ $\left(32\sqrt{3} - \frac{32}{3}\pi\right)\,\text{cm}^2$
⑤ $\left(64 - \frac{8}{3}\pi\right)\,\text{cm}^2$

해설

$\overline{AT}^2 = 8 \times 24 = 192 \quad \therefore\ \overline{AT} = 8\sqrt{3}(\text{cm})$

$\overline{AO'} : \overline{AT} : \overline{O'T} = 2 : \sqrt{3} : 1$ 이므로 $\angle AO'T = 60°$

작은 반원의 넓이는 $\pi \times 4^2 \times \frac{1}{2} = 8\pi(\text{cm}^2)$

$\triangle ATO'$ 의 넓이는 $8 \times 8\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 32\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

부채꼴 O′BT 의 넓이는 $\pi \times 8^2 \times \frac{60°}{360°} = \frac{32}{3}\pi(\text{cm}^2)$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$8\pi + \left(32\sqrt{3} - \frac{32}{3}\pi\right) = \left(32\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi\right)\,\text{cm}^2$ 이다.