1. $\dfrac{x^3-x}{x^2-x}+\dfrac{x^4-1}{x^2-1}-\dfrac{x^2-2x-3}{x+1}\times\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ 을 계산하면?

① x^2+x+1　② $\dfrac{x^2+1}{x-1}$　③ $\dfrac{2x}{x^2-1}$

④ x^2-1　⑤ $\dfrac{2x-1}{x^2-x}$

해설

$$\frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)}+\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1}$$

$$-\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}\times\frac{x+2}{(x-3)(x+2)}$$

$$=x+1+x^2+1-1=x^2+x+1$$

2. x에 대한 항등식 $\dfrac{6-2x^2}{x^3-x^2-x+1}=\dfrac{A}{1+x}+\dfrac{B}{1-x}+\dfrac{C}{(1-x)^2}$를 만족시키는 상수 $A,\ B,\ C$ 에 대하여 $A^2+B^2+C^2$의 값은?

① 14　　② 13　　③ 12　　④ 11　　⑤ 10

해설

(우변)

$=\dfrac{A(x-1)^2+B(1+x)(1-x)+C(1+x)}{(1+x)(1-x)^2}$

$=\dfrac{(A-B)x^2+(-2A+C)x+(A+B+C)}{x^3-x^2-x+1}$

주어진 식의 분자를 비교하면

$-2x^2+6=(A-B)x^2+(-2A+C)x+(A+B+C)$

$\therefore \begin{cases} A-B=-2 \\ -2A+C=0 \\ A+B+C=6 \end{cases}$

이것을 풀면 $A=1,\ B=3,\ C=2$

$\therefore\ A^2+B^2+C^2=1+9+4=14$

3. $2+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}=\frac{37}{13}$ 을 만족시키는 정수 x, y, z에 대하여 $x+y+z$의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

2를 우변으로 이항하고 정리하면

$\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}}=\frac{11}{13}$

역수를 취하면 $x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z}}=\frac{13}{11}=1+\frac{2}{11}$

$\therefore x=1$

또, $y+\frac{1}{z}=\frac{11}{2}=5+\frac{1}{2}$

$\therefore y=5, z=2$

따라서 $x+y+z=8$

4. $x+\frac{1}{x}=2$일 때, $x^2-\frac{1}{x^2}$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=2^2-4=0$

$\therefore x^2-\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=0\times 2=0$

5. $\frac{a}{4}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2}$ 이고, $\frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라. (단, $abc \neq 0$, p, q 는 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : $p+q=32$

해설

$\frac{a}{4}=\frac{b}{3}=\frac{c}{2}=k(k \neq 0)$ 로 놓으면

$a=4k,\ b=3k,\ c=2k$

$\therefore \frac{a^2-b^2+c^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{11}{21}$

$\therefore\ p+q=11+21=32$

6. $2x-y+z=0,\ x-2y+3z=0$ 일 때, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$ 의 값을 구하면 $\dfrac{n}{m}$ 이다. 이때, $m+n$ 의 값을 구하여라.(단, m, n 은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x-y+z=0\cdots㉠$

$x-2y+3z=0\cdots㉡$

$㉠\times 2-㉡ : 3x=z$

$\therefore x=\dfrac{z}{3},\ y=\dfrac{5z}{3}$

여기서 $x=k$ 라 하면 $y=5k,\ z=3k$

따라서 $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{k^2-5k^2+25k^2}{k^2+25k^2+9k^2}=\dfrac{3}{5}\ \therefore m=5,\ n=3$

$\therefore m+n=8$

7. $\dfrac{-a+b+c}{a}=\dfrac{a-b+c}{b}=\dfrac{a+b-c}{c}$ 일 때 $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ 의 값은? (단, $a+b+c \neq 0$)

① 8 ② 6 ③ 4 ④ 2 ⑤ 0

해설

$\dfrac{-a+b+c}{a}=\dfrac{a-b+c}{b}=\dfrac{a+b-c}{c}$

$=\dfrac{a+b+c}{a+b+c}=1$

$a+b+c \neq 0$ 이므로, $\dfrac{-a+b+c}{a}=1$

$\therefore\ b+c=2a$

같은 방법으로 $a+c=2b,\ a+b=2c$

$\therefore\ \dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=\dfrac{8abc}{abc}=8$

8. $\frac{x+y}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z}{8}=\frac{2x+8y-z}{a}$가 성립할 때, a의 값은?

① 2 ② 7 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

가비의 리에 의하여

$\frac{x+y}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z}{8}=\frac{p(x+y)+qy+rz}{5p+2q+8r}$

$=\frac{2x+8y-z}{a}$

$px+py+qy+rz=px+(p+q)y+rz$

$=2x+8y-z$에서

$p=2,\ q=6,\ r=-1$

$\therefore a=5p+2q+8r=5\times2+2\times6+8\times(-1)=14$

$\therefore a=14$

9. $\frac{a+b}{5} = \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3} = \frac{2a+8b-c}{x}$ 에서 x의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $x = 10$

해설

$$\frac{a+b}{5} = \frac{2b+c}{4} = \frac{c}{3}$$
$$= \frac{2(a+b)+3(2b+c)-4c}{2\times5+3\times4+(-4)\times3}$$
$$= \frac{2a+8b-c}{10}$$

$\therefore x = 10$

10. $a : b = c : d$일 때 다음 등식 중 성립하지 <u>않는</u> 것은?(단, 분모는 모두 0 이 아니다.)

① $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$ ② $\dfrac{a+d}{a-d} = \dfrac{b+c}{b-c}$

③ $\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{b+d}{b-d}$ ④ $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$

⑤ $\dfrac{c}{d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

해설

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ 에서

$\dfrac{a-b}{b} = \dfrac{c-d}{d} \cdots$ ㉠

$\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{c+d}{d} \cdots$ ㉡

㉡ ÷ ㉠ 하면

$\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{c+d}{c-d}$

$\dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{d}$ 에서

$\dfrac{a-c}{c} = \dfrac{b-d}{d} \cdots$ ㉢

$\dfrac{a+c}{c} = \dfrac{b+d}{d} \cdots$ ㉣

㉣ ÷ ㉢ 하면

$\dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{b+d}{b-d}$

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ 에서 가비의 리를 이용하면

$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

$\therefore \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d} = \dfrac{a-c}{b-d}$

11. K 고등학교 1학년 남학생과 여학생 수가 같다고 한다. 1학년 학생 중에서 휴대폰을 갖고 있는 학생과 휴대폰을 갖고 있지 않은 학생의 비율이 1학년 전체로는 9 : 1이고, 남학생 중에서는 6 : 1이라고 한다면 여학생 중에서의 비율은?

① 13 : 1　② 17 : 2　③ 22 : 3　④ 31 : 1　⑤ 33 : 2

해설

전체학생수를 $10a$라 하면
(휴대폰 있는 학생수)$= 9a$, (휴대폰 없는 학생수)$= a$
남학생수 : $5a$, 여학생수 $5a$

남학생 중 휴대폰 있는 학생수 : $5a \times \frac{6}{7}$

여학생 중 휴대폰 있는 학생수: $9a - \frac{30a}{7} = \frac{33}{7}a$

여학생 중 휴대폰 없는 학생 수: $5a - \frac{33}{7}a = \frac{2}{7}a$

$\therefore\ \frac{33}{7}a : \frac{2}{7}a = 33 : 2$

12. 평행이동 $f:(x,\ y) \to (x+m,\ y+n)$ 에 의하여 분수함수 $y=\frac{x+1}{x}$ 의 그래프가 분수함수 $y=\frac{-x+3}{x-2}$ 의 그래프로 옮겨질 때, $m-n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

분수함수 $y=\frac{x+1}{x}=\frac{1}{x}+1$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 m 만큼,y 축의 방향으로
n 만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\frac{1}{x-m}+1+n$이 식이
$y=\frac{-x+3}{x-2}=\frac{-(x-2)+1}{x-2}=\frac{1}{x-2}-1$ 과 같으므로
$m=2,\ 1+n=-1$ 에서 $n=-2$
$\therefore\ m-n=4$

13. 두 함수 $y=\frac{5x+1}{3x-2}$, $y=\frac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선이 일치할 때, $a+b$ 의 값은?

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$y=\frac{5x+1}{3x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\frac{2}{3}$, $y=\frac{5}{3}$ 이고,

$y=\frac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\frac{b}{2}$, $y=\frac{a}{2}$ 이다.

이 때, 두 그래프의 점근선이 일치하므로

$\frac{2}{3}=-\frac{b}{2}$, $\frac{5}{3}=\frac{a}{2}$

$\therefore\ a=\frac{10}{3}$, $b=-\frac{4}{3}$

$\therefore\ a+b=2$

14. 함수 $y=\frac{2x+3}{x+4}$의 그래프는 점 (p, q)에 대하여 대칭이고, 동시에 $y=x+r$에 대하여 대칭이다. 이때, $p+q+r$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$y=\frac{2x+3}{x+4}=\frac{2(x+4)-5}{x+4}=\frac{-5}{x+4}+2$

따라서 $y=\frac{2x+3}{x+4}$의 그래프는 점 $(-4, 2)$에 대하여 대칭이고,

점 $(-4, 2)$를 지나고

기울기가 1인 직선 $y=x+6$에 대하여 대칭이다.

$\therefore p=-4$, $q=2$, $r=6$

$\therefore p+q+r=-4+2+6=4$

15. 함수 $y = \dfrac{-2x}{x+3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x = -3$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y = -2$ 이다.

③ 함수 $y = \dfrac{6}{x} - 2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 x축, y축을 모두 지난다.

⑤ 함수 $y = \dfrac{6}{x+3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$y = \dfrac{-2x}{x+3} = \dfrac{-2(x+3)+6}{x+3} = \dfrac{6}{x+3} - 2$

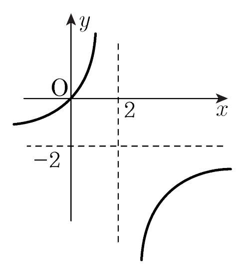
그러므로 함수의 점근선은 $x = -3$, $y = -2$이고

$y = \dfrac{6}{x}$ 의 그래프를 x축 방향으로 -3만큼,

y축 방향으로 -2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ③이다.

16. 다음 그림과 같이 주어진 분수함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 점근선이 $x=2,\ y=-2$ 일 때, 상수 $a,\ b,\ c$ 의 합 $a+b+c$ 의 값은?



① -6　② -4　③ -3

④ 2　⑤ 7

해설

점근선이 $x=2, y=-2$ 이므로 $y=-2+\dfrac{k}{x-2},\ (k\neq 0)$

점 $(0,\ 0)$ 을 지나므로

$0=-2+\dfrac{k}{-2},\quad k=-4$

따라서 $y=-2+\dfrac{-4}{x-2}=\dfrac{-2x}{x-2}$

$\therefore\quad a=-2,\ b=0,\ c=-2$

$\therefore\quad a+b+c=-4$

17. 점근선이 $x = -2$, $y = 3$이고, 점 $(0,\ 5)$를 지나는 유리함수 $f(x)$의 $-6 \le x \le -4$에서의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$y = \dfrac{k}{x+2} + 3,\ (k \neq 0)$

$5 = \dfrac{k}{0+2} + 3 \quad \therefore\ k = 4$

$f(x) = \dfrac{4}{x+2} + 3$

$x = -6$일 때, $M = \dfrac{4}{-6+2} + 3 = 2$

$x = -4$일 때, $m = \dfrac{4}{-4+2} + 3 = 1$

$\therefore\ Mm = 2 \times 1 = 2$

18. 다음과 같은 두 집합 $A,\ B$에 대하여 $A \cap B = \varnothing$일때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

$$A = \left\{(x,\ y) \mid y = \frac{|x-1|}{x}\right\}$$
$$B = \left\{(x, y) \mid y = ax\right\}$$

① $a < 0$ ② $a > 0$ ③ $0 < a < 1$

④ $0 \le a \le 1$ ⑤ $a < 0, a > 1$

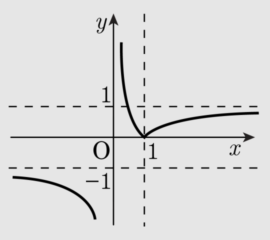
해설

$y = \dfrac{|x-1|}{x}$ 에서

$x \ge 1$일 때,

$y = \dfrac{x-1}{x} = -\dfrac{1}{x} + 1$

$x < 1$일 때, $y = \dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x} - 1$



$A \cap B = \varnothing$이려면 위의 곡선과 원점을 지나는
직선 $y = ax$가 만나지 않아야 하므로 ,
윗쪽 그림에서 직선은 제 2, 4사분면에만
존재해야 한다.
따라서 구하는 a의 값의 범위는 $a < 0$

19. 함수 $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}(d > 0)$ 와 $g(x) = \dfrac{x+2}{3x+4}$ 가 $(f \circ g)(x) = x$ 를 항상 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 점근선의 방정식이 $x = m, y = n$ 일 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① -1 ② 1 ③ $-\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이고 $f \circ g = I$ 이므로
$g = f^{-1}$ 또는 $g^{-1} = f$
$y = g(x)$ 의 역함수를 구하면

$y = \dfrac{x+2}{3x+4} \Leftrightarrow 3yx + 4y = x + 2$

$\Leftrightarrow (3y-1)x = -4y+2$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{-4y+2}{3y-1}$

$\therefore y = g^{-1}(x) = \dfrac{-4x+2}{3x-1}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= g^{-1}(x) \\ &= \frac{-4x+2}{3x-1} \\ &= \frac{ax+b}{cx+d}(d>0) \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x-2}{-3x+1} \\ &= \frac{4\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{2}{3}}{-3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \\ &= -\frac{4}{3} + \frac{\frac{2}{3}}{3\left(x-\frac{1}{3}\right)} \end{aligned}$$

$\therefore$ 점근선의 방정식은 $x = \dfrac{1}{3}$, $y = -\dfrac{4}{3}$

$\therefore m = \dfrac{1}{3}$, $n = -\dfrac{4}{3}$

$\therefore m+n = -1$

20. 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$이 성립할 때, $\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{b^2} + |2a|$를 간단히 하면?

① $-2a$　　② $a-2b$　　③ $-2a+2b$

④ $2a-2b$　　⑤ $3a$

해설

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a \geq 0,\ b < 0$

$\sqrt{(a-b)^2} - \sqrt{b^2} + |2a| = |a-b| - |b| + |2a|$

$= a - b + b + 2a = 3a$

21. $\sqrt{28-\sqrt{300}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $\dfrac{11}{a+b}+\dfrac{11}{a-b+4}$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 9 ④ 11 ⑤ 17

해설

$$\sqrt{28-\sqrt{300}}=\sqrt{28-2\sqrt{75}}$$
$$=5-\sqrt{3}=3+(2-\sqrt{3})$$
$\therefore\ a=3,\ b=2-\sqrt{3}$

$$\therefore\ (\text{준식})=\frac{11}{5-\sqrt{3}}+\frac{11}{5+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{11(5+\sqrt{3})+11(5-\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})}=5$$

22. 함수 $y=\sqrt{-2x+a}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하였더니 함수 $y=\sqrt{-2x+4}-3$의 그래프와 겹쳐졌다. 이 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=2$

▷ 정답 : $b=-3$

해설

함수 $y=\sqrt{-2x+a}$의 그래프를
x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 b만큼
평행이동한 함수의 그래프의 식은
$y=\sqrt{-2(x-1)+a}+b=\sqrt{-2x+2+a}+b$
이 식이 $y=\sqrt{-2x+4}-3$과 같으므로
$2+a=4$, $b=-3$
$\therefore\ a=2$, $b=-3$

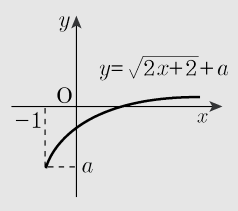
23. 함수 $y = \sqrt{2x+2} + a$ 의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나도록 하는 정수 a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

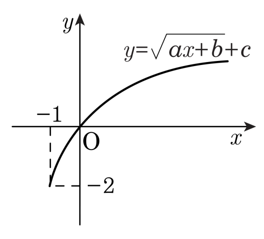
해설

$y = \sqrt{2x+2} + a = \sqrt{2(x+1)} + a$
주어진 함수는 $y = \sqrt{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 이 함수의 그래프가 제 1 , 3 , 4 사분면을 지나려면 $x = 0$ 일 때, $y < 0$이어야 한다.



$\sqrt{2} + a < 0$ 이므로 $a < -\sqrt{2}$
따라서 정수 a의 최댓값은 -2이다.

24. 함수 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

주어진 그래프에서 $y = \sqrt{ax+b}+c$ 의
그래프는 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼
평행이동한 것이므로
$y = \sqrt{ax+b}+c$
$\Leftrightarrow \ y = \sqrt{a(x+1)}-2$
이것이 원점을 지나므로 $0 = \sqrt{a(0+1)}-2$
$\therefore \ \sqrt{a} = 2 \ \Rightarrow \ a = 4$
$y = \sqrt{4x+4}-2$
$\therefore a+b+c = 4+4-2 = 6$

25. $-5 \le x \le 3$ 일 때, 함수 $y = 2\sqrt{4-x} - 7$ 의 최댓값을 m , 최솟값을 n 라 할 때, $m+n$ 의 값은?

① -8　　② -6　　③ -4　　④ -2　　⑤ 0

해설

$y = 2\sqrt{4-x} - 7 = 2\sqrt{-(x-4)} - 7$
주어진 함수의 그래프는 $y = 2\sqrt{-x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -7 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.
$x = -5$ 일 때, 최댓값 $m = 2\sqrt{4-(-5)} - 7 = -1$
$x = 3$ 일 때, 최솟값 $n = 2\sqrt{4-3} - 7 = -5$
$\therefore\ m+n = -1 + (-5) = -6$

26. 곡선 $y = \sqrt{4x-8}$과 직선 $y = x + k$가 한 점에서 만나기 위한 k 의 값의 범위는?

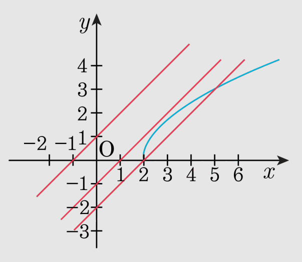
① $k = -2$ 또는 $k > 1$　　② $k = -1$ 또는 $k < -2$

③ $k = 1$ 또는 $k > 2$　　④ $k = 2$ 또는 $k < -1$

⑤ $k = -1$

해설

그래프에서 보듯이 한 점에서 만나는 경우는
접하는 경우이거나 $k < -2$인 경우이다.



접하는 경우는 $\sqrt{4x-8} = x + k$에서

$4x - 8 = x^2 + 2kx + k^2$

$x^2 + 2(k-2)x + k^2 + 8 = 0$

$\dfrac{D}{4} = (k-2)^2 - (k^2+8) = -4k - 4 = 0$에서 $k = -1$

따라서 $k = -1$ 또는 $k < -2$

27. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}}$ 의 값은?

① $\dfrac{6-\sqrt{6}}{6}$　② $\dfrac{\sqrt{5}-1}{12}$　③ $\dfrac{10-\sqrt{2}}{20}$
④ $\dfrac{16-\sqrt{5}}{30}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{30}-1}{2}$

해설

$\sqrt{2}=\sqrt{1}\times\sqrt{2},\ \sqrt{6}=\sqrt{2}\times\sqrt{3},\ \cdots,\ \sqrt{30}=\sqrt{5}\times\sqrt{6}$ 임을 이용한다.

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{12}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{20}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{30}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}\times\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{4}}{\sqrt{5}\times\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}\times\sqrt{5}}$$

$$=\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$=1-\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{6}}=\frac{6-\sqrt{6}}{6}$$

28. $A=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}}$, $B=\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{2+\dfrac{2}{x}}}$, $C=\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{3+\dfrac{3}{x}}}$ 에 대하여 $x=\dfrac{2}{5}$ 일 때의 A, B, C 의 대소 관계를 순서대로 옳게 나타낸 것은?

① $A>B>C$　② $A\geq B=C$　③ $A<B<C$
④ $A\leq B=C$　⑤ $A=B=C$

해설

$$A=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{2}{5}}}=\frac{1}{1+\frac{5}{2}}$$
$$=\frac{1}{1+\frac{2}{7}}=\frac{1}{\frac{9}{7}}=\frac{7}{9}$$
$$B=\frac{2}{2+\frac{2}{2+\frac{2}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{2+5}}=\frac{1}{\frac{8}{7}}=\frac{7}{8}$$
$$C=\frac{3}{3+\frac{3}{3+\frac{3}{x}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{21}{2}}}=\frac{1}{\frac{23}{21}}=\frac{21}{23}$$
$\therefore\ A=\dfrac{21}{27},\ B=\dfrac{21}{24},\ C=\dfrac{21}{23}$

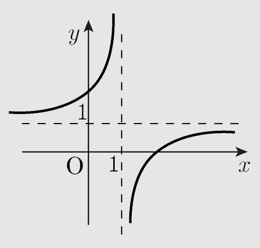
$\therefore A<B<C$

29. 분수함수 $y=\dfrac{x-4}{x-1}$의 정의역이 $\{x \mid -2 \le x \le 0\}$일 때, 다음 중 치역을 바르게 구한 것은?

① $\{y \mid -2 \le y \le 0\}$ ② $\{y \mid -2 \le y \le 2\}$
③ $\{y \mid -2 \le y \le 4\}$ ④ $\{y \mid 0 \le y \le 2\}$
⑤ $\{y \mid 2 \le y \le 4\}$

해설

$y=\dfrac{x-4}{x-1}=\dfrac{(x-1)-3}{x-1}=1+\dfrac{-3}{x-1}$



$x=-2$일 때, $y=\dfrac{-2-4}{-2-1}=2$ 이고,

$x=0$일 때, $y=\dfrac{-4}{-1}=4$ 이므로,

치역은 $\{y \mid 2 \le y \le 4\}$

30. $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$, $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ 일 때, $\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{x+y}{4}}-\sqrt{1-\dfrac{x+y}{4}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$

$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1,\ x+y=2\sqrt{3}$

$$\sqrt{1+\frac{x+y}{4}}=\sqrt{1+\frac{2\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$\sqrt{1-\frac{x+y}{4}}=\sqrt{1-\frac{2\sqrt{3}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$$

주어진 식에 대입하면

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$

31. $x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$에 대하여 $x^3 + x^2 + x + 1 = a\sqrt{3} + b$가 성립할 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 유리수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x = \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

$2x + 1 = \sqrt{3},\ (2x+1)^2 = 3$

$\therefore\ 2x^2 + 2x - 1 = 0$

$\therefore\ x^3 + x^2 + x + 1$

$= (2x^2 + 2x - 1) \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{3}{2}x + 1$

$= \frac{3}{2}x + 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} + 1$

$= \frac{3}{4}\sqrt{3} + \frac{1}{4} = a\sqrt{3} + b$

$\therefore\ a + b = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$

32. $x,\ y$가 유리수일 때, $[x,\ y] = \sqrt{2}x + y$로 정의하자. 유리수 $a,\ b$가 $[2a,\ 2b] + 1 = [b,\ a] - 2$를 만족할 때, $a + b$의 값은?

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

해설

$[2a,\ 2b] + 1 = \sqrt{2}(2a) + 2b + 1$
$[b,\ a] - 2 = \sqrt{2}b + a - 2$
$\therefore\ (2b+1) + 2a\sqrt{2} = (a-2) + b\sqrt{2}$

$\begin{cases} 2b + 1 = a - 2 \\ 2a = b \end{cases}$ 에서

$a = -1,\ b = -2$
$\therefore\ a + b = -1 - 2 = -3$

33. 두 곡선 $y = \sqrt{x+1}+1$, $x = \sqrt{y+1}+1$의 교점을 P라고 할 때, 선분 OP의 길이를 구하면? (단, O는 원점)

① $3\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $9\sqrt{2}$ ④ $6\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

해설

두 함수가 서로 역함수 관계이므로 곡선의 교점은
$y = \sqrt{x+1}+1$와 $y = x$의 교점과 같다.

$\sqrt{x+1}+1 = x$에서
$x+1 = (x-1)^2$
$x = 0,\ 3$
$x \geq 1$이므로 $x = 3$
$\therefore \mathrm{P}(3, 3)$
$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$