

1. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

$\textcircled{\tiny{\Gamma}}$ $x^2 + 2x + 1 = 0$

$\textcircled{\tiny{\Delta}}$ $x^2 + 2x + 4 = 0$

$\textcircled{\tiny{\Xi}}$ $x^2 + 4x + 2 = 0$

- ① $\textcircled{\tiny{\Gamma}}$

② $\textcircled{\tiny{\Delta}}$

③ $\textcircled{\tiny{\Xi}}$

④ $\textcircled{\tiny{\Gamma}}, \textcircled{\tiny{\Xi}}$

⑤ $\textcircled{\tiny{\Delta}}, \textcircled{\tiny{\Xi}}$

해설

$\textcircled{\tiny{\Gamma}}$ $(x + 1)^2 = 0$: 중근

$\textcircled{\tiny{\Delta}}$ $a = 1, b' = 1, c = 4$
 $1^2 - 1 \cdot 4 = -3 < 0$: 허근

$\textcircled{\tiny{\Xi}}$ $a = 1, b' = 2, c = 2$
 $2^2 - 1 \cdot 2 = 2 > 0$: 서로 다른 두 실근 (○)

2. 이차방정식 $x^2 - 6x + k = 0$ 이 중근을 가질 때, 실수 k 의 값은?

① 1

② 3

③ 6

④ 9

⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (-3)^2 - 1 \cdot k = 0$$

$$\therefore k = 9$$

3. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 6x + 2k - 1 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $k < -2$

② $-1 < k < 0$

③ $-1 < k < 4$

④ $k < 5$

⑤ $0 < k < 5$

해설

$x^2 - 6x + 2k - 1 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = 9 - 2k + 1 > 0 \quad \therefore 2k < 10 \quad \therefore k < 5$$

4. 이차방정식 $x^2 + 8x + 2k = 0$ 이 허근을 가지도록 하는 정수 k 의 값의 최솟값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

이차방정식에서 허근을 가질 조건은

$\frac{D'}{4} < 0$ 이어야 하므로,

$16 - 2k < 0, 2k > 16, \therefore k > 8$

$\therefore$ 정수 k 의 최솟값은 9

5. 이차방정식 $2x^2 - 6x + 4 = 0$ 의 두 근을 α, β 라고 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 은?

① -9

② -2

③ 0

④ 5

⑤ 13

해설

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 4 = 5$$

6. 이차방정식 $x^2 - 3x - (k - 1) = 0$ 이 실근을 갖게 하는 실수 k 의 값으로 옳지 않은 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - 3x - (k - 1) = 0$ 이 실근을 가지므로

$$D = (-3)^2 + 4 \cdot 1 \cdot (k - 1) \geq 0$$

$$9 + 4k - 4 \geq 0, 4k \geq -5$$

$$\therefore k \geq -\frac{5}{4}$$

7. 계수가 실수인 x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(k-a)x + k^2 + b - 3 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b 의 값은?

- ① $a = 1, b = 2$ ② $a = 0, b = 3$ ③ $a = -1, b = 2$
④ $a = 0, b = 2$ ⑤ $a = -1, b = 3$

해설

중근을 가지려면, 판별식이 0이다.

$$D' = (k-a)^2 - (k^2 + b - 3) = 0$$

$$\Rightarrow -2ak + a^2 - b + 3 = 0$$

모든 k 에 대해 성립하려면

$$-2a = 0, \quad a^2 - b + 3 = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 3$$

8. 이차식 $ax^2 + 4x + 2a$ 가 x 에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① ± 1 ② $\pm \sqrt{2}$ ③ ± 2 ④ $\pm \sqrt{3}$ ⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x 에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 2^2 - a \cdot 2a = 0$$

$$4 - 2a^2 = 0, \quad a^2 = 2$$

$$\therefore a = \pm \sqrt{2}$$

9. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2 + bx + 3 = 0$ 의 두 근의 합은?

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$$-a = 2 + 3, a = -5$$

$$b = 2 \cdot 3 = 6$$

$$\therefore -5x^2 + 6x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$\text{두 근의 합은 } \frac{6}{5}$$

10. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$$a=2, b'=-2, c=3$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

11. x 에 대한 두 이차방정식
 $x^2 - 2\sqrt{b}x + (2a + 1) = 0 \cdots \textcircled{A}$
 $x^2 - 2ax - b = 0 \cdots \textcircled{B}$ 가 있다. $\textcircled{A}$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, $\textcircled{B}$ 의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)

- ☒ ㉠ 서로 다른 두 실근을 가진다.
☐ ㉡ 중근을 가진다.
☐ ㉢ 서로 다른 두 허근을 가진다.
☐ ㉣ 판별할 수 없다.
☐ ㉤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

$\textcircled{A}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = b - (2a + 1) > 0 \therefore b > 2a + 1$$

$\textcircled{B}$ 의 판별식을 D' 이라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D'}{4} &= a^2 + b > a^2 + 2a + 1 \\ &= (a + 1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{D'}{4} > 0$$

따라서, $\textcircled{B}$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

12. x 에 대한 이차방정식 $x^2 = k(x - 2) + a$ 가 실수 k 의 값에 관계없이 항상 실근을 갖기 위한 실수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a \geq -2$

② $a \geq 4$

③ $a \leq 4$

④ $a \geq -4$

⑤ $a \geq 2$

해설

주어진 이차방정식을 정리하면

$$x^2 - kx + (2k - a) = 0$$

실근을 가지려면 판별식 $D \geq 0$ 이어야 한다.

$$k^2 - 4(2k - a) \geq 0$$

$$k^2 - 8k + 4a \geq 0$$

위 부등식을 k 에 대하여 정리하면

$$(k - 4)^2 + 4a - 16 \geq 0$$

실수 k 의 값에 관계없이 항상 성립하려면

판별식 $\frac{D}{4} \leq 0$ 이거나,

$$4a - 16 \geq 0 (\because (k - 4)^2 \geq 0) \text{ 이어야 한다.}$$

따라서 $a \geq 4$

13. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\frac{\beta}{\alpha - 1}, \frac{\alpha}{\beta - 1}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2 + ax + b = 0$ 이다. 이 때, $a + b$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 0 ④ -3 ⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 3, \alpha\beta = 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 9 - 2 = 7 \\ a &= -\left(\frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{\alpha}{\beta - 1}\right) \\ &= -\frac{\beta(\beta - 1) + \alpha(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} \\ &= -\frac{(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ &= -\frac{7 - 3}{1 - 3 + 1} = 4 \\ b &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha - 1) \cdot (\beta - 1)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ &= \frac{1}{1 - 3 + 1} = -1 \\ \therefore a + b &= 4 - 1 = 3\end{aligned}$$

14. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 x 의 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$ 과 같다. a, b 의 값을 구하면?

① $a = 3, b = -2$

③ $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}$

⑤ $a = 1, b = \frac{1}{2}$

② $a = 0, b = -\frac{1}{2}$

④ $a = 2, b = -\frac{1}{4}$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

$$\alpha + \beta = -a \cdots \cdots \text{①}$$

$$\alpha\beta = b \cdots \cdots \text{②}$$

$\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2 + ax + b = 0$

이므로

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = -a \cdots \cdots \text{③}$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{\beta}\right) \times \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) = b \cdots \cdots \text{④}$$

$$\text{③에서 } \alpha + \beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -a$$

$$\therefore -a + \frac{-a}{b} = -a \quad \therefore -\frac{a}{b} = 0 \quad \therefore a = 0$$

$$\text{④에서 } \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} + 2 = b, \quad b + \frac{1}{b} + 2 = b,$$

$$\frac{1}{b} + 2 = 0 \quad \therefore b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a = 0, b = -\frac{1}{2}$$

15. a, b, c 는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$ 의 해가 α, β 일 때, 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$ 의 해를 구하면?

- ① α, β
- ② $-\alpha, -\beta$
- ③ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$
- ④ $-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta}$
- ⑤ $\alpha, -\beta$

해설

$$\alpha + \beta = \frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$cx^2 - bx + a = 0$ 에서

$$(\text{두 근의 합}) = \frac{b}{c} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \left(\because \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \right)$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha\beta}$$

따라서 구하는 두 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ 이다.

해설

$ax^2 - bx + c = 0$ 의 양변을 $x^2 (\neq 0)$ 으로 나누면

$$a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$$

이 때, $\frac{1}{x} = t$ 라 놓으면, $ct^2 - bt + a = 0$

$$t = \frac{1}{x} = \frac{1}{\alpha} \text{ 또는 } \frac{1}{\beta}$$

$\therefore cx^2 - bx + a = 0$ 의 해는 $\frac{1}{\alpha}$ 또는 $\frac{1}{\beta}$ 이다.