1. 다음 이차방정식 중 서로 다른 두 실근을 갖는 것을 모두 고르면?

㉠ $x^2+2x+1=0$	㉡ $x^2+2x+4=0$
㉢ $x^2+4x+2=0$	

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉠, ㉢　⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠ $(x+1)^2=0$: 중근

㉡ $a=1, b'=1, c=4$

$1^2-1\cdot 4=-3<0$: 허근

㉢ $a=1, b'=2, c=2$

$2^2-1\cdot 2=2>0$: 서로 다른 두 실근 (○)

2. 이차방정식 $x^2-6x+k=0$이 중근을 가질 때, 실수 k의 값은?

① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 36

해설

주어진 이차방정식이 중근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-1\cdot k=0$$

$\therefore\ k=9$

3. x에 대한 이차방정식 $x^2-6x+2k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $k<-2$　② $-1<k<0$　③ $-1<k<4$

④ $k<5$　⑤ $0<k<5$

해설

$x^2-6x+2k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=9-2k+1>0 \quad \therefore 2k<10 \quad \therefore k<5$

4. 이차방정식 $x^2+8x+2k=0$이 허근을 가지도록 하는 정수 k의 값의 최솟값은?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

이차방정식에서 허근을 가질 조건은

$\frac{D'}{4} < 0$이어야 하므로,

$16-2k<0,\ 2k>16,\ \therefore\ k>8$

$\therefore$ 정수 k의 최소값은 9

5. 이차방정식 $2x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$은?

① -9　② -2　③ 0　④ 5　⑤ 13

해설

$\alpha+\beta=3, \quad \alpha\beta=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-4=5$

6. 이차방정식 $x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 갖게 하는 실수 k의 값으로 옳지 않은 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2-3x-(k-1)=0$이 실근을 가지므로

$D=(-3)^2+4\cdot1\cdot(k-1)\geq0$

$9+4k-4\geq0,\ 4k\geq-5$

$\therefore\ k\geq-\dfrac{5}{4}$

7. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$ ② $a=0, b=3$ ③ $a=-1, b=2$

④ $a=0, b=2$ ⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D' = (k-a)^2 - (k^2+b-3) = 0$

$\Rightarrow \quad -2ak + a^2 - b + 3 = 0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a = 0,\ a^2 - b + 3 = 0$

$\therefore \quad a=0, b=3$

8. 이차식 $ax^2+4x+2a$가 x에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a의 값은?

① ± 1 ② $\pm\sqrt{2}$ ③ ± 2 ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=2^2-a\cdot 2a=0$

$4-2a^2=0,\ a^2=2$

$\therefore a=\pm\sqrt{2}$

9. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

10. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a=2, b'=-2, c=3$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-6}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{2}=1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

11. x 에 대한 두 이차방정식
$x^2-2\sqrt{b}x+(2a+1)=0 \cdots$ ㉠
$x^2-2ax-b=0 \cdots$ ㉡가 있다. ㉠이 서로 다른 두 실근을 가질 때, ㉡의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)

① 서로 다른 두 실근을 가진다.

② 중근을 가진다.

③ 서로 다른 두 허근을 가진다.

④ 판별할 수 없다.

⑤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

㉠의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=b-(2a+1)>0 \therefore\ b>2a+1$$

㉡의 판별식을 D' 이라 하면

$$\frac{D'}{4}=a^2+b>a^2+2a+1$$
$$=(a+1)^2 \geq 0$$
$$\therefore\ \frac{D'}{4}>0$$

따라서, ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

12. x에 대한 이차방정식 $x^2 = k(x-2)+a$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \geq -2$ ② $a \geq 4$ ③ $a \leq 4$

④ $a \geq -4$ ⑤ $a \geq 2$

해설

주어진 이차방정식을 정리하면

$x^2 - kx + (2k-a) = 0$

실근을 가지려면 판별식 $D \geq 0$이어야 한다.

$k^2 - 4(2k-a) \geq 0$

$k^2 - 8k + 4a \geq 0$

위 부등식을 k에 대하여 정리하면

$(k-4)^2 + 4a - 16 \geq 0$

실수 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

판별식 $\dfrac{D}{4} \leq 0$이거나,

$4a - 16 \geq 0 (\because (k-4)^2 \geq 0)$이어야 한다.

따라서 $a \geq 4$

13. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α,β라 할 때, $\dfrac{\beta}{\alpha-1}$, $\dfrac{\alpha}{\beta-1}$을 두 근으로 하는 이차방정식은 $x^2+ax+b=0$이다. 이 때, $a+b$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 0 ④ -3 ⑤ -5

해설

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=1$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-2=7$

$$a=-\left(\frac{\beta}{\alpha-1}+\frac{\alpha}{\beta-1}\right)$$

$$=-\frac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$$

$$=-\frac{(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$

$$=-\frac{7-3}{1-3+1}=4$$

$$b=\frac{\alpha\beta}{(\alpha-1)\cdot(\beta-1)}=\frac{\alpha\beta}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$

$$=\frac{1}{1-3+1}=-1$$

$\therefore a+b=4-1=3$

14. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 x의 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$과 같다. a, b의 값을 구하면?

① $a=3,\ b=-2$

② $a=0,\ b=-\frac{1}{2}$

③ $a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{3}$

④ $a=2,\ b=-\frac{1}{4}$

⑤ $a=1,\ b=\frac{1}{2}$

해설

$x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=-a\cdots\cdots$ ①

$\alpha\beta=b\cdots\cdots$ ②

$\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$

이므로

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=-a\cdots\cdots$ ③

$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\times\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=b\cdots\cdots$ ④

③에서 $\alpha+\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-a$

$\therefore\ -a+\frac{-a}{b}=-a \quad \therefore\ -\frac{a}{b}=0 \quad \therefore\ a=0$

④에서 $\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}+2=b,\ \ b+\frac{1}{b}+2=b,$

$\frac{1}{b}+2=0 \quad \therefore\ b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=0,\ b=-\frac{1}{2}$

15. a, b, c는 모두 양수이다. 방정식 $ax^2 - bx + c = 0$의 해가 α, β일 때, 방정식 $cx^2 - bx + a = 0$의 해를 구하면?

① $\alpha,\ \beta$ ② $-\alpha,\ -\beta$ ③ $\dfrac{1}{\alpha},\ \dfrac{1}{\beta}$
④ $-\dfrac{1}{\alpha},\ -\dfrac{1}{\beta}$ ⑤ $\alpha,\ -\beta$

해설

$\alpha + \beta = \dfrac{b}{a},\ \alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

$cx^2 - bx + a = 0$에서

$$(\text{두 근의 합}) = \frac{b}{c} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \left(\therefore \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \right)$$

$$(\text{두 근의 곱}) = \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha\beta}$$

따라서 구하는 두 근은 $\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\beta}$이다.

해설

$ax^2 - bx + c = 0$의 양변을 $x^2 (\neq 0)$으로 나누면

$$a - \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 0$$

이 때, $\dfrac{1}{x} = t$라 놓으면, $ct^2 - bt + a = 0$

$t = \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\alpha}$ 또는 $\dfrac{1}{\beta}$

$\therefore\ cx^2 - bx + a = 0$의 해는 $\dfrac{1}{\alpha}$ 또는 $\dfrac{1}{\beta}$이다.