1. 이차방정식 $x^2 - 2x + k + 2 = 0$이 중근을 가지도록 하는 상수 k의 값을 구하면?

① -1　　② 1　　③ 0　　④ -2　　⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + (k+2) = 0$

$\frac{D}{4} = (-1)^3 - (k+2) = 0$

$1 - k - 2 = 0 \quad \therefore \ k = -1$

2. 이차방정식 $5x^2-6x+a-5=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때 정수 a의 최솟값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$D'=9-5(a-5)=-5a+34<0$

$\therefore a>\dfrac{34}{5}$

3. 이차방정식 $2x^2-6x+4=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^2+\beta^2$은?

① -9 ② -2 ③ 0 ④ 5 ⑤ 13

해설

$\alpha+\beta=3, \quad \alpha\beta=2$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=9-4=5$

4. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a<1$ ② $a\geq 1$ ③ $-1<a<1$

④ $a>1$ ⑤ $a\geq -1$

해설

$x^2+2x+2-a=0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D>0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$$

$1-2+a>0$

$\therefore\ a>1$

5. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$ ② $a=0, b=3$ ③ $a=-1, b=2$

④ $a=0, b=2$ ⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.

$D'=(k-a)^2-(k^2+b-3)=0$

$\Rightarrow \quad -2ak+a^2-b+3=0$

모든 k 에 대해 성립하려면

$-2a=0,\ a^2-b+3=0$

$\therefore \quad a=0, b=3$

6. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+3=0$의 두 근의 합은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

해설

$-a=2+3$, $a=-5$

$b=2\cdot 3=6$

$\therefore\ -5x^2+6x+3=0$에서

두 근의 합은 $\frac{6}{5}$

7. 이차식 $2x^2 - 4x + 3$ 을 복소수 범위에서 인수분해하면?

① $(x-3)(2x+1)$

② $2\left(x-1-\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

③ $(x+3)(2x-1)$

④ $2\left(x+1-\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x-1+\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

⑤ $2\left(x-1-\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(x+1+\dfrac{\sqrt{2}i}{2}\right)$

해설

$a = 2, b' = -2, c = 3$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4-6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{2}i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$\therefore 2\left(x-1-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-1+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$

8. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, a, b, c, p, q 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 판별식은 b^2-4ac 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0$, $c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0$, $c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능(참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ b^2-4ac 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐(거짓)

㉣ 판별식 b^2-4ac 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

9. 이차방정식 $x^2-5x-m=0$의 한 근이 다른 근의 4배일 때, 상수 m의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

주어진 식의 한 근이 다른 한 근의 4배이므로
두 근을 $\alpha,\ 4\alpha(a\neq 0)$ 로 놓으면
$\alpha+4\alpha=5\cdots\cdots$㉠
$\alpha\cdot 4\alpha=-m\cdots\cdots$㉡
㉠,㉡에서 $\alpha=1,\ m=-4$

해설

10. x에 대한 이차방정식 $x^2+mx+6=0$의 두 근 a, b에 대하여 $|a-b|=1$이 성립할 때, $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}$의 값은? (단, $m<0$)

① $-1-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{3}$ ③ $2-\sqrt{3}$

④ $1+\sqrt{2}$ ⑤ $-2+\sqrt{5}$

해설

$x^2+mx+6=0$의 두 근이 $a,\ b$

$a+b=-m,\ ab=6$

$|a-b|=1$

$|a-b|^2=(a+b)^2-4ab$

$=m^2-24=1$

$m^2=25\ \therefore\ m=-5(\because\ m<0)$

$x^2-5x+6=0$

$(x-3)(x-2)=0$

$a=3,\ b=2$

$\therefore\ \sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}=\sqrt{4}+\sqrt{3}=2+\sqrt{3}$

11. 이차방정식 $x^2-mx+4=0$의 두 근의 차가 2일 때, 실수 m의 값은?

① $\pm 2\sqrt{2}$　② $\pm 2\sqrt{3}$　③ $\pm 2\sqrt{5}$　④ $\pm 2\sqrt{6}$　⑤ $\pm 2\sqrt{7}$

해설

두 근을 α, $\alpha+2$라고 하면,
근과 계수와의 관계에서
$\alpha+(\alpha+2)=m \quad \cdots\cdots ㉠$
$\alpha(\alpha+2)=4 \quad \cdots\cdots ㉡$
㉡에서 $\alpha^2+2\alpha-4=0$
$\therefore \ \alpha=-1\pm\sqrt{5}$
이것을 ㉠에 대입하면
$m=2(-1\pm\sqrt{5})+2=\pm 2\sqrt{5}$

12. 이차방정식 $x^2+ax-a-7=0$의 두 근이 모두 정수일 때, 상수 a의 값이 아닌 것은?

① -7　　② -3　　③ -1　　④ 1　　⑤ 3

해설

이차방정식의 두 근을 α , β $(\alpha \le \beta)$라 하면
근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\beta=-a \cdots\cdots$ ①
$\alpha\beta=-a-7 \cdots\cdots$ ②
② − ① 에서 $\alpha\beta-(\alpha+\beta)=-7$
$\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-6$, $(\alpha-1)(\beta-1)=-6$
α , β 가 정수이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$은 -6의 약수이다.
$\therefore (\alpha-1, \beta-1)=(-6,1),(-3,2),(-2,3),(-1,6)$
$\therefore (\alpha, \beta)=(-5,2),(-2,3),(-1,4),(0,7)$
$a=-\alpha-\beta$이므로
이 때, $a=3$, -1 , -3 , -7

13. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$

$$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$$

정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

14. 이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근의 차가 2가 되는 q의 최솟값은 ?

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

이차방정식 $x^2-(p+4)x+q-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \alpha+2$라고 하면

$$|\alpha+2-\alpha|=\frac{\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}}{1}=|2|$$

$$\sqrt{p^2+8p+16-4q+8}=2$$

양변을 제곱하여 q에 관해 정리하면

$$4=p^2+8p+16-4q+8,\ 4q=p^2+8p+20$$

$$q=\frac{1}{4}p^2+2p+5=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

해설

두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=p+4, \alpha\beta=q-2$

두 근의 차가 2이므로

$$|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=2$$

$$\sqrt{(p+4)^2-4(q-2)}=2$$

양변을 제곱하면

$$(p+4)^2-4(q-2)=4$$

q에 대해 정리하면

$$q=\frac{1}{4}(p+4)^2+1$$

$\therefore\ p=-4$일 때 $q=1$로 최솟값을 가진다.

15. 이차방정식 $x^2 - 2x + a = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, 두 수 $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 이차방정식이 $x^2 - bx + 4 = 0$이다. 이 때, 실수 $a + b$의 값을 구하면?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$x^2 - 2x + a = 0$의 두 근을 α, β라 하면

$\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = a$

한편, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$를 두 근으로 하는 방정식은

$(\alpha + \beta) + \alpha\beta = a + 2$

$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha\beta) = 2a$에서

$x^2 - (a + 2)x + 2a = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠이 $x^2 - bx + 4 = 0$과 같으므로

$a + 2 = b$, $2a = 4$에서 $a = 2$, $b = 4$

$\therefore\ a + b = 2 + 4 = 6$