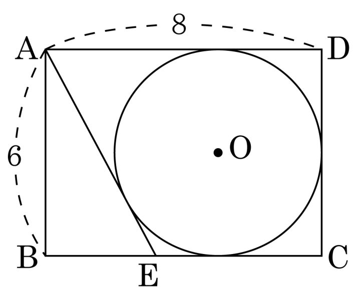
1. 다음 그림에서 □ABCD 는 $\overline{AB} = 6$, $\overline{AD} = 8$ 직사각형이다. 원 O 가 □AECD 에 내접할 때, $\overline{BE}$ 의 길이를 구하여라.

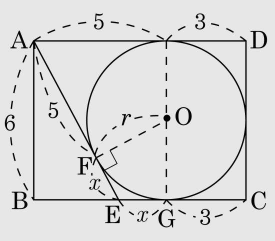


▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{16}{5}$

해설

원 O 의 반지름의 길이를 r 라 하면



$2r = 6,\ r = 3$

$\overline{FE} = \overline{EG} = \ x(x < 5)$ 라 하면

$\overline{BE} + \overline{EC} = 8$ 이므로 $\overline{BE} = 5 - x$ 이다.

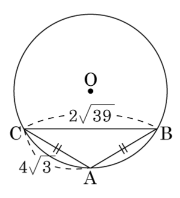
$\triangle$ABE 에서

$(5 + x)^2 = (5 - x)^2 + 36,\ 20x = 36$

$\therefore x = \frac{9}{5}$

$\therefore \overline{BE} = 5 - \frac{9}{5} = \frac{16}{5}$

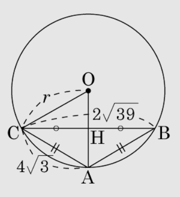
2. 다음 그림과 같은 $\overline{AB} = \overline{AC} = 4\sqrt{3}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{39}$ 인 이등변삼각형 ABC 의 외접원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



$\overline{OA}, \overline{OC}$ 를 그어 $\overline{OC}$ 의 길이를 r 이라 하고 $\overline{OA}$ 와$\overline{CB}$ 의 교점을 H 라 하면 $\overline{OA}$ 는 $\overline{BC}$ 를 수직이등분하므로 $\overline{HC} = \sqrt{39}$

$\triangle$HCA 에서 $\overline{HA} = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{39}\right)^2} = 3$

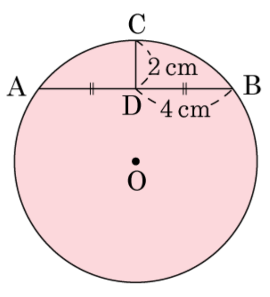
$\triangle$OCH 에서$\overline{OC}^2 = \overline{HC}^2 + \overline{OH}^2$

$r^2 = \left(\sqrt{39}\right)^2 + (r-3)^2 = 39 + r^2 - 6r + 9$

$6r = 48$

$\therefore r = 8$

3. 다음 그림과 같이 호 AB 는 원 O 의 일부분이고, $\overline{AD} = \overline{BD}$, $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 일 때, 이 원의 반지름의 길이는?



① 4 cm ② 5 cm ③ 6 cm ④ 7 cm ⑤ 8 cm

해설

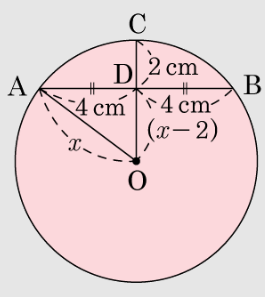
원 O 의 반지름의 길이를 x cm 라 하면

$x^2 = 4^2 + (x-2)^2$

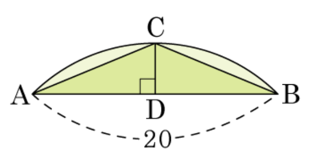
$x^2 = 16 + x^2 - 4x + 4$

$4x = 20$

$\therefore x = 5(\text{cm})$



4. 다음 그림에서 5.0pt$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ 는 반지름의 길이가 26 인 원의 일부분이다. $\overline{\mathrm{AB}} = 20$ 일 때, $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 넓이는?



① 10　　② $20\sqrt{2}$　　③ 20　　④ 25　　⑤ $24\sqrt{5}$

해설

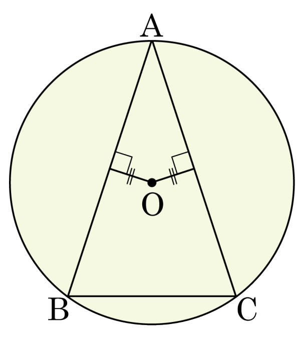
원의 중심 O와 점 C , 점 D를 연결한다.

$\triangle\mathrm{AOD}$ 에서 $\overline{\mathrm{OD}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AO}}^2 - \overline{\mathrm{AD}}^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24$

$\therefore \overline{\mathrm{CD}} = \overline{\mathrm{OC}} - \overline{\mathrm{OD}} = 26 - 24 = 2$

따라서 넓이는 $\frac{1}{2} \times 20 \times 2 = 20$ 이다.

5. 다음 그림의 원 O 에서 5.0pt$\overparen{\mathrm{BC}} = 10\pi$, $\angle\mathrm{BAC} = 30^\circ$ 일 때, 5.0pt$\overparen{\mathrm{AC}}$ 의 길이는?



① 15π ② 18π ③ 22π ④ 25π ⑤ 30π

해설

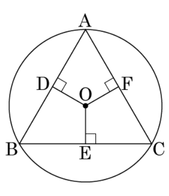
원의 중심에서 현이 이르는 거리가 같으면 두 현의 길이가 같으므로 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}$ 인 이등변 삼각형이다.
$\angle\mathrm{A} = 30^\circ$ 이므로 $\angle\mathrm{ABC} = 75^\circ$
또한 원주각의 크기에 호의 길이는 비례하므로

$$5.0\mathrm{pt}\overparen{\mathrm{BC}} : 5.0\mathrm{pt}\overparen{\mathrm{AC}} = \angle\mathrm{BAC} : \angle\mathrm{ABC}$$

$$10\pi : 5.0\mathrm{pt}\overparen{\mathrm{AC}} = 30^\circ : 75^\circ$$

$\therefore$ 5.0pt$\overparen{\mathrm{AC}} = 25\pi$

6. 다음 그림과 같은 원 O 에서 $\overline{\mathrm{OD}} = \overline{\mathrm{OE}} = \overline{\mathrm{OF}}$ 이고 $\overline{\mathrm{AB}} = 6\mathrm{cm}$ 일 때, 원 O 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : ________ cm^2

▷ 정답 : $12\pi\,\mathrm{cm}^2$

해설

$\overline{\mathrm{OD}} = \overline{\mathrm{OE}} = \overline{\mathrm{OF}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CA}}$

$\triangle\mathrm{ABC}$ 가 정삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AE}} = 2 : \sqrt{3}$

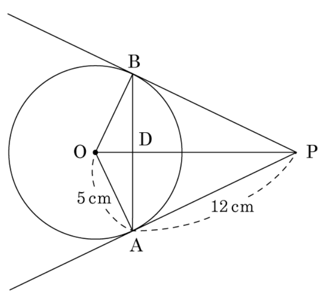
$\overline{\mathrm{AE}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

정삼각형의 외심은 내심이며, 또 무게중심이므로

$\overline{\mathrm{OA}} = \dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{AE}} = \dfrac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}\,(\mathrm{cm})$

(원의 넓이)$=\pi \times \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 12\pi\,(\mathrm{cm}^2)$

7. 다음 그림에서 두 직선 PA, PB 는 반지름의 길이가 5cm 인 원 O 의 접선이고 점 A, B 는 접점이다. $\overline{PA} = 12\text{cm}$ 일 때, $\overline{AB}$ 의 길이는?

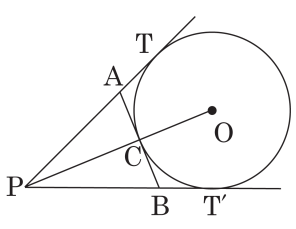


① 24cm ② $\dfrac{192}{2}$cm ③ $\dfrac{120}{13}$cm
④ $\dfrac{124}{5}$cm ⑤ 25cm

해설

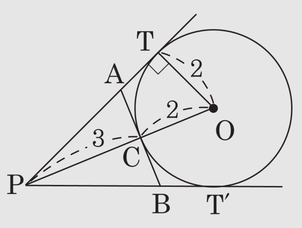
삼각형 PAO 는 직각삼각형이므로 $\overline{PO} = 13\text{cm}$ 이다.
또한, $\overline{AB} \perp \overline{PO}$ 이므로
$\overline{PA} \times \overline{AO} = \overline{PO} \times \overline{AD} \Rightarrow 12 \times 5 = 13 \times \overline{AD}$ $\therefore \overline{AD} = \dfrac{60}{13}\text{cm}$
따라서 수선 OD 는 현 AB 를 이등분하므로 $\overline{AB} = 2\overline{AD} = \dfrac{120}{13}\text{cm}$ 이다.

8. 다음 그림에서 원 O 는 $\overline{AB}$ 와 점 C 에서 접하고, $\overline{PA}$ 와 $\overline{PB}$ 의 연장선과 두 점 T, T′ 에서 각각 접한다. $\overline{PC} = 3\text{cm}$, $\overline{CO} = 2\text{cm}$ 일 때, $\overline{PT} + \overline{PT'}$ 의 값은?



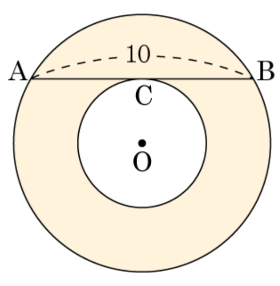
① $\dfrac{\sqrt{21}}{2}\text{cm}$　② $\sqrt{21}\text{cm}$　③ $2\sqrt{21}\text{cm}$
④ $\sqrt{29}\text{cm}$　⑤ $2\sqrt{29}\text{cm}$

해설



$\triangle POT$ 에서 $\overline{OP} = 5\text{cm}, \overline{OT} = 2\text{cm}$ 이므로
$\overline{PT} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}\text{cm}$
$\overline{PT} = \overline{PT'}$　$\therefore \overline{PT} + \overline{PT'} = \sqrt{21} \times 2 = 2\sqrt{21}\text{cm}$

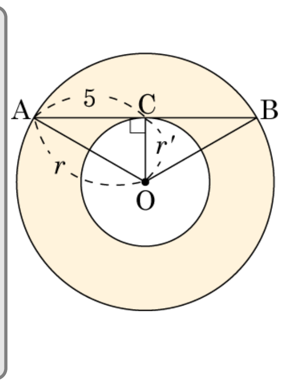
9. 다음 그림과 같이 두 개의 동심원이 있다. 큰 원의 현 AB 가 작은 원에 접하고, $\overline{AB} = 10$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하면?



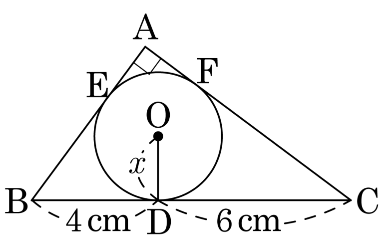
① 10π ② 15π ③ 20π ④ 25π ⑤ 30π

해설

큰 원의 반지름의 길이를 r , 작은 원의 반지름의 길이를 r' 이라고 하자.
$\overline{AB}$ 는 작은 원의 접선이므로
$\overline{OC} \perp \overline{AB}$, $\overline{AC} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 5$
직각삼각형 $\triangle ACO$ 에서 $r^2 - r'^2 = 5^2$
(색칠한 부분의 넓이)$= \pi r^2 - \pi r'^2 = \pi(r^2 - r'^2) = 25\pi$



10. 다음 그림에서 점 D, E, F 는 직각삼각형 ABC 와 내접원 O 의 접점일 때, 원 O 의 넓이는?

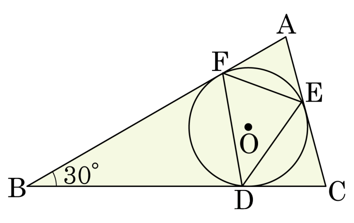


① πcm^2　② $2\pi\text{cm}^2$　③ $3\pi\text{cm}^2$　④ $4\pi\text{cm}^2$　⑤ $5\pi cm^2$

해설

$\overline{\text{BD}} = 4\text{cm},\ \overline{\text{CD}} = 6\text{cm}$ 이므로
$\overline{\text{AB}} = (4+x)\text{cm},\ \overline{\text{AC}} = (6+x)\text{cm}$ 이다.
$(4+x)^2 + (6+x)^2 = 10^2$
$2x^2 + 20x + 52 = 100$
$x^2 + 10x - 24 = 0$
$(x-2)(x+12) = 0$
따라서 $x = 2\ (x > 0)$ 이므로
원 O 의 넓이는 $2^2\pi = 4\pi\ (\text{cm}^2)$

11. 다음 그림에서 원 O 는 $\triangle ABC$ 의 내접원이고, $\triangle DEF$ 의 외접원이다. $\angle B = 30°$ 일 때, $\angle FED$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답: ______ °

▷ 정답: 75 °

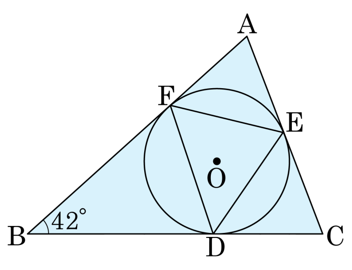
해설

선분 $\overline{OF}$, $\overline{OD}$ 를 그으면

$\angle FOD = 360° - 90° - 90° - 30° = 150°$

$\therefore \angle FED = 150° \times \frac{1}{2} = 75°$

12. 다음 그림에서 원 O 는 $\triangle ABC$ 의 내접원이고, $\triangle DEF$ 의 외접원이다. $\angle B = 42°$ 일 때, $\angle FED$ 의 크기를 구하면?

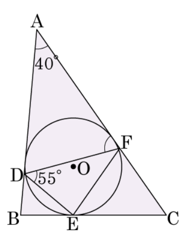


① 63°　② 65°　③ 69°
④ 72°　⑤ 75°

해설

선분 $\overline{OF}$, $\overline{OD}$ 를 그으면
$\angle FOD = 360° - 90° - 90° - 42° = 138°$
$\therefore\ \angle FED = 138° \times \frac{1}{2} = 69°$

13. 다음 그림에서 $\triangle\mathrm{ABC}$ 의 내접원은 $\triangle\mathrm{DEF}$ 의 외접원이다. $\angle\mathrm{BAC} = 40°$, $\angle\mathrm{FDE} = 55°$ 일 때, $\angle\mathrm{AFD}$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답: $\underline{\quad}°$

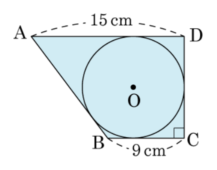
▷ 정답: 70 $\underline{°}$

해설

$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{AF}}$ 이므로

$\angle\mathrm{AFD} = \dfrac{1}{2}(180° - 40°) = 70°$

14. 다음 그림에서 □ABCD 에 내접하는 원 O 의 둘레의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ____________ cm

▷ 정답 : $\frac{45}{4}\pi$ cm

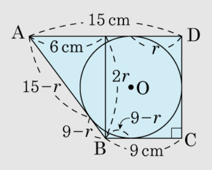
해설

반지름의 길이를 rcm라 하면 $(15-r+9-r)^2 = 6^2+(2r)^2$, $(24-2r)^2 = 36+4r^2$

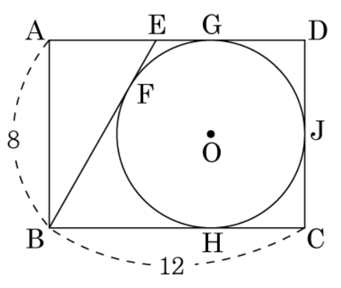
$576-96r+4r^2 = 36+4r^2$

$\therefore r = \frac{45}{8}(cm)$

(원의 둘레의 길이) $= 2\pi \times \frac{45}{8} = \frac{45}{4}\pi\,(\mathrm{cm})$



15. 다음 그림과 같이 원 O 가 직사각형 ABCD 의 세 변과 $\overline{BE}$ 에 접할 때, $\overline{BE}$ 의 길이를 구하여라. (단, F, G, H, J 는 접점)



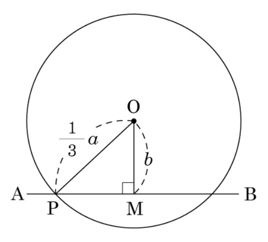
▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$\overline{ED}+\overline{BC}=\overline{BE}+\overline{DC}$ 이므로 $\overline{ED}+12=\overline{BE}+8$ 이다. 따라서 $\overline{ED}=\overline{BE}-4$ 이다.
$\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{ED}=12-(\overline{BE}-4)=16-\overline{BE}$ 이므로 직각삼각형 ABE 에서 $\overline{BE^2}=(16-\overline{BE})^2+8^2$ 이다. 따라서 $\overline{BE}=10$ 이다.

16. 다음 그림과 같이 길이가 a 인 선분 AB 의 중점 M 에서의 수선과 원의 중심 O 가 만난다. $\overline{\mathrm{OM}} = b$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}a$ 인 원과 $\overline{\mathrm{AB}}$ 가 만나는 한 점을 P 라 한다. 선분 AP 의 길이를 x 라 하고 선분 BP 의 길이를 y 라 하면 $y = x+2,\ xy = 35$ 의 식이 성립한다고 할 때, $a+b^2$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$\overline{\mathrm{OM}} = b,\ \overline{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}a$ 이므로

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PM}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}a\right)^2 - b^2}$

$\overline{\mathrm{BP}} = y$

$= \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 - b^2}$

$= \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3}$

$\overline{\mathrm{AP}} = x$

$= \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 - b^2}$

$= \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3}$

이때 $y = x + 2,\ xy = 35$ 이므로

$y - x = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3} - \left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3}\right)$

$= 2\frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3} = 2$

$\therefore\ a^2 - 9b^2 = 9 \cdots ①$

$xy = \left(\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 9b^2}}{3}\right)$

$= \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 - 9b^2}{9}$

$= 35 \cdots ②$

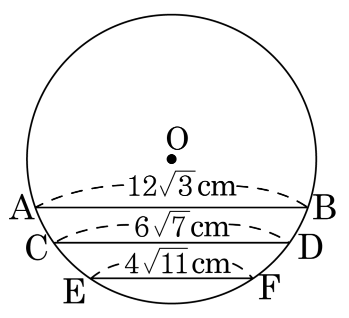
①을 ②에 대입하면 $a^2 = 144$

$\therefore\ a = 12\,(\because a > 0)$

이를 ①에 대입하면 $b^2 = 15$

$\therefore\ a + b^2 = 12 + 15 = 27$

17. 다음 그림과 같이 원 O 에 세 개의 현을 그었을 때 원의 중심 O 로부터 세 현까지의 거리의 비가 6 : 9 : 10 이 된다. 세 현의 길이가 각각 $12\sqrt{3}$cm, $6\sqrt{7}$cm, $4\sqrt{11}$cm 일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하여라.

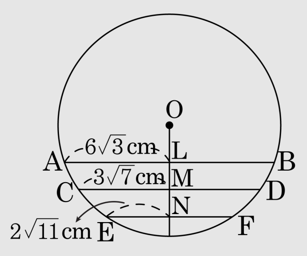


▶ 답: ______ cm

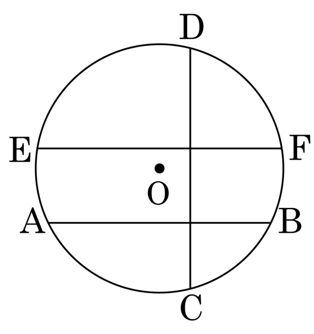
▷ 정답: 12 cm

해설

원의 중심 O 에서 $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ 에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N 이라 하면
원의 중심 O 로부터 세 현까지의 거리의 비가 6 : 9 : 10 이므로
$\overline{OL} = 6k$, $\overline{OM} = 9k$, $\overline{EF} = 10k$
원 O 의 반지름의 길이를 r 이라 하고 $\triangle OAL$, $\triangle OCM$, $\triangle OEN$ 에서 각각 피타고라스 정리를 이용하면
$r^2 = (6k)^2 + (6\sqrt{3})^2 \cdots$ ①
$r^2 = (9k)^2 + (3\sqrt{7})^2 \cdots$ ②
$r^2 = (10k)^2 + (2\sqrt{11})^2 \cdots$ ③
①, ②에 의하여 $36k^2 + 108 = 81k^2 + 63$
$\therefore\ k = 1(\because k > 0)$
$k = 1$ 을 ①에 대입하면 $r^2 = 144$
$\therefore\ r = 12(\because r > 0)$



18. 다음 그림과 같이 원 O 에 세 개의 현이 그어져 있다. 현 AB 가 원의 중심 O 로부터 αcm 만큼 떨어져 있고 현 CD 는 현 AB 보다 βcm 만큼 가깝게 떨어져 있고 현 EF 는 현 CD 보다 $\frac{\beta}{2}$cm 만큼 가깝게 떨어져 있다. 세 현의 길이가 각각 $2\sqrt{10}$cm, $2\sqrt{22}$cm, 10cm 일 때, 이 원의 반지름의 길이를 구하여라. (단, $\alpha > 0$, $\beta > 0$)



▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{26}$

해설

그림과 같이 원의 중심 O 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$, $\overline{\mathrm{EF}}$ 에 내린 수선의 발을 각각 L, M, N 이라 하면

$\overline{\mathrm{OL}} = \alpha$, $\overline{\mathrm{OM}} = \alpha - \beta$, $\overline{\mathrm{ON}} = \alpha - \frac{3}{2}\beta$

원 O 의 반지름의 길이를 r 이라 하고 $\triangle$OAL, $\triangle$OCM, $\triangle$OEN 에서 각각 피타고라스 정리를 이용하면

$r^2 = \alpha^2 + (\sqrt{10})^2 \cdots$ ①

$r^2 = (\alpha - \beta)^2 + (\sqrt{22})^2 \cdots$ ②

$r^2 = (\alpha - \frac{3}{2}\beta)^2 + 5^2 \cdots$ ③

② − ①를 하면 $\beta^2 - 2\alpha\beta + 12 = 0 \cdots$ ④

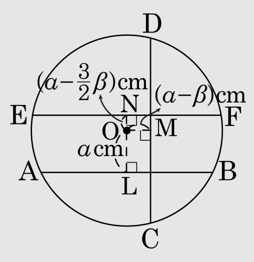
③ − ② 을 하면 $\frac{5}{4}\beta^2 - \alpha\beta + 3 = 0 \cdots$ ⑤

④, ⑤에 의하여 $\beta^2 = 4 \therefore \beta = 2(\because \beta > 0)$

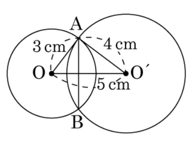
이를 ④에 대입하면 $\alpha = 4$

이를 ①에 대입하면 $r^2 = 26$

$\therefore r = \sqrt{26}(\because r > 0)$



19. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 3cm, 4cm 인 두 원이 두 점 A, B 에서 만나고 중심 사이의 거리가 5cm 일 때, 공통현 AB 의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 4.8 cm

해설

$\triangle OAO'$ 에서 $\overline{OA}^2 + \overline{O'A}^2 = \overline{OO'}^2$ 이므로 $\angle A = 90°$

점 A 에서 $\overline{OO'}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

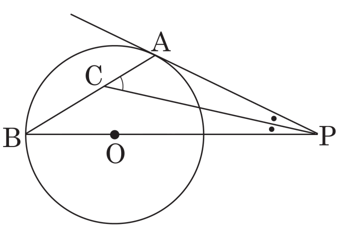
$\triangle AOO' = \frac{1}{2}\overline{OA} \times \overline{O'A} = \frac{1}{2}\overline{OO'} \times \overline{AH}$

즉, $\overline{OA} \times \overline{O'A} = \overline{OO'} \times \overline{AH}$

$3 \times 4 = 5\overline{AH}$, $\overline{AH} = 2.4\,(\mathrm{cm})$

$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 4.8\,(\mathrm{cm})$

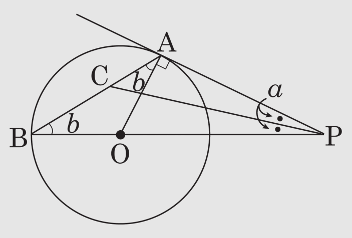
20. 다음 그림에서 $\overline{PA}$ 는 원 O 와 점 A 에서 접하고, 선분 PO 의 연장선과 원 O 가 만나는 점을 B 라 한다. 또, $\angle APB$ 의 이등분선이 $\overline{AB}$ 와 만나는 점을 C 라 할 때, $\angle PCA$ 의 크기를 구하면?



① $25°$ ② $30°$ ③ $45°$ ④ $50°$ ⑤ $60°$

해설

점 A 와 점 O 를 연결하면
$\angle OAP = 90°$



$\angle APC = \angle OPC = a$, $\angle OAB = \angle OBA = b$ 라 하면, $\triangle ABP$ 에서 $90° + 2(a+b) = 180°$

$\therefore a + b = 45°$

$\triangle CBP$ 에서 $\angle PCA = \angle CPB + \angle CBP$

$\therefore \angle PCA = a + b = 45°$

21. 원 O 의 외부의 한 점 P 에서 그 원에 그은 접선과 할선이 원과 만나는 점을 각각 T, A, B 라 할 때, 선분 BT 는 원의 지름이고 $\overline{\mathrm{PA}} = 2$, $\overline{\mathrm{PT}} = 6$ 일 때, 원 O 의 둘레의 길이를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $12\sqrt{2}\pi$

해설

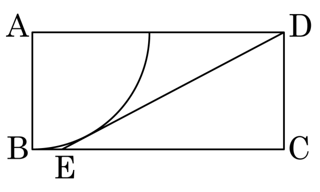
$\overline{\mathrm{PT}}^2 = \overline{\mathrm{PA}} \cdot \overline{\mathrm{PB}}, 36 = 2 \times \overline{\mathrm{PB}} \qquad \therefore\ \overline{\mathrm{PB}} = 18$

피타고라스 정리에 의하여 원의 지름은

$\overline{\mathrm{BT}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PB}}^2 - \overline{\mathrm{PT}}^2} = \sqrt{288} = 12\sqrt{2}$

따라서 원 O 의 둘레의 길이는 $12\sqrt{2}\pi$ 이다.

22. 다음 그림은 직사각형 ABCD 에서 점 A 를 중심으로 사분원을 그린 것이다. 점 D 에서 사분원에 그은 접선과 선분 BC 가 만나는 점을 E 라 하고 직사각형의 가로, 세로의 길이가 각각 13, 5 일 때, 선분 EC 의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

점 D 에서 사분원에 그은 접선의 접점을 P 라 하고 보조선 AP 를 그으면

$\overline{AP} = \overline{AB} = 5$ (원의 반지름)

삼각형 APD 에서 $\overline{DP} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

이 때 $\overline{EC} = x$ 라 하면 $\overline{BE} = \overline{DE} = 13 - x$

$\therefore\ \overline{DE} = 12 + 13 - x = 25 - x$

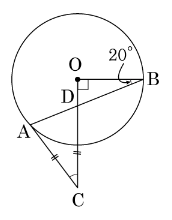
삼각형 DEC 에서

$(25 - x)^2 = x^2 + 5^2$

$625 - 50x + x^2 = x^2 + 25$

$\therefore\ x = 12$

23. 다음 그림에서 선분 AC 는 원 O 의 접선이고 $\overline{AC} = \overline{CD}$, $\angle OBD = 20°$ 일 때, $\angle ACD$ 의 크기를 구하여라.

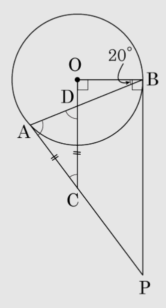


▶ 답 : $\underline{\quad\quad}$ °

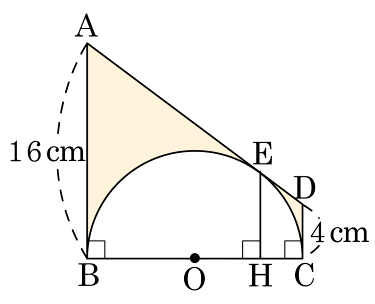
▷ 정답 : 40 °

해설

다음 그림과 같이 점 B 에서 접선을 그어 $\overline{AC}$ 의 연장선과 만나는 점을 P 라 하면
$\overline{PA} = \overline{PB}$ 이므로 $\angle PAD = \angle PBD$
$\overline{AC} = \overline{CD}$ 이므로 $\angle CAD = \angle CDA$
$\therefore\ \angle PBD = \angle CDA$
여기서 $\angle PBD$ 와 $\angle CDA$ 는 동위각이므로 $\overline{PB} \,/\!/\, \overline{CD}$
이때 $\angle PBO = 90°$ 이므로 $\angle BOC = 90°$
삼각형 BOD 에서
$\angle ODB = 180° - (90° + 20°) = 70°$
삼각형 ADC 에서
$\angle ADC = 70°$ ($\angle ODB$ 의 맞꼭지각)
삼각형 ADC 는 이등변삼각형이므로
$\angle ACD = 180° - (70° + 70°) = 40°$



24. 그림과 같이 반원 O 에 세 접선을 그어 그 교점과 접점을 각각 A, B, C, D, E 라고 한다. $\overline{AB} = 16\text{cm}$, $\overline{CD} = 4\text{cm}$ 이고, 점 E 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\overline{EH}$ 의 길이를 구하여라.

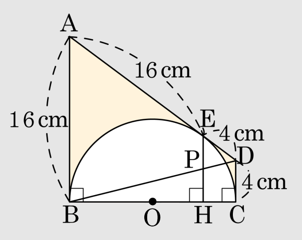


▶ 답: ________ cm

▷ 정답: $\dfrac{32}{5}$ cm

해설

다음 그림과 같이 점 B 와 점 D 를 연결하는 보조선을 긋고 $\overline{BD}$ 와 $\overline{EH}$ 의 교점을 P 라고 하자.



$\overline{AB} = \overline{AE}$, $\overline{DC} = \overline{DE}$

$\overline{AB} \,/\!/\, \overline{EP} \,/\!/\, \overline{DC}$ 이므로

$\triangle ABD \backsim \triangle EPD$, $\triangle BCD \backsim \triangle BHP$

$\triangle ABD \backsim \triangle EPD$ 에서 $\overline{DE} : \overline{DA} = \overline{EP} : \overline{AB}$,

$4 : 20 = \overline{EP} : 16$

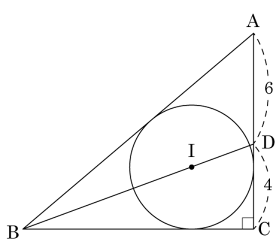
$\therefore \overline{EP} = \dfrac{16}{5}(\text{cm})$

또, $\triangle BCD \backsim \triangle BHP$ 에서 $\overline{BP} : \overline{BD} = \overline{PH} : \overline{CD}$ 이고, $\overline{BP} : \overline{BD} = \overline{AE} : \overline{AD}$ 이므로 $16 : 20 = \overline{PH} : 4$

$\therefore \overline{PH} = \dfrac{16}{5}(\text{cm})$

따라서 $\overline{EH} = \overline{EP} + \overline{PH} = \dfrac{32}{5}(\text{cm})$ 이다.

25. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 의 내심을 I 라 하고, $\overline{BI}$ 의 연장선이 $\overline{AC}$ 와 만나는 점을 D 라 할 때, $\overline{AD} = 6, \overline{CD} = 4$ 이다. 내접원의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $5 - \sqrt{5}$

해설

$\overline{BD}$ 가 $\angle ABC$ 의 이등분선이므로 $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{AD} : \overline{CD} = 6 : 4 = 3 : 2$

$\overline{AB} = 3a, \overline{BC} = 2a$ 로 놓으면

$9a^2 = 4a^2 + 100$

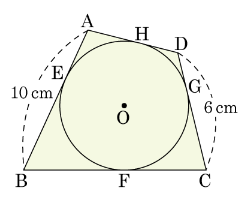
$5a^2 = 100$

$a = 2\sqrt{5} (\because a > 0)$

$\frac{1}{2} \times 10 \times 4\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times r \times (10 + 10\sqrt{5})$

$\therefore r = 5 - \sqrt{5}$

26. 다음 그림과 같이 반지름이 4cm 인 원 O 에 외접하는 사각형 ABCD 의 각 변과 원 O 의 접점을 E, F, G, H 라 할 때, 사각형의 넓이를 구하여라.

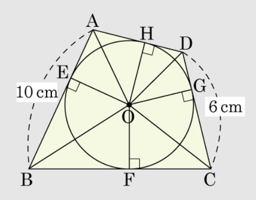


▶ 답: $\underline{\text{cm}^2}$

▷ 정답: 64 $\underline{\text{cm}^2}$

해설

외접 사각형의 성질에 의해서 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD} = 16(\text{cm})$



또한, 원의 반지름과 사각형의 모든 변은 수직으로 만나므로

(사각형의넓이)

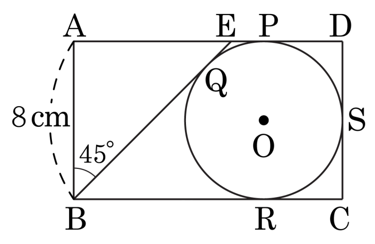
$= \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COD + \triangle DOA$

$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times r + \frac{1}{2} \times \overline{DA} \times r$

$= \frac{1}{2} \times r \times (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA})$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 32 = 64(\text{cm}^2)$

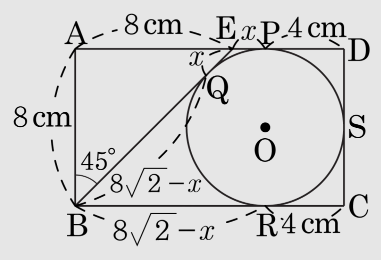
27. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 8\text{cm}$ 인 직사각형 ABCD 의 세 변과 $\overline{BE}$ 에 접하는 원 O 에 대하여 $\angle ABE = 45°$ 일 때, 직사각형의 둘레의 길이를 구하여라.



▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : $32 + 8\sqrt{2}$ cm

해설



그림과 같이 $\overline{EP} = x$ 라고 하면 $\overline{EQ} = \overline{EP} = x$ 이고, 직각이등변삼각형 ABE 에서 $\angle ABE = 45°$ 이므로 $\overline{BE} = 8\sqrt{2}$,

$\overline{BQ} = \overline{BR} = 8\sqrt{2} - x$

$\overline{AD} = x + 12$,

$\overline{BC} = 8\sqrt{2} + 4 - x$ 이므로 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 에서

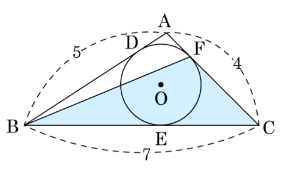
$x + 12 = 8\sqrt{2} + 4 - x \qquad \therefore\ x = (4\sqrt{2} - 4)$

$\therefore\ \overline{AD} = 12 + 4\sqrt{2} - 4 = 8 + 4\sqrt{2}$

따라서 직사각형의 둘레의 길이는

$(8 + 8 + 4\sqrt{2}) \times 2 = (32 + 8\sqrt{2})\text{cm}$ 이다.

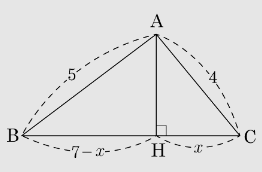
28. 다음 그림에서 원 O 는 $\triangle ABC$ 의 내접원이고 점 D, E, F 는 접점이다. $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 7$, $\overline{AC} = 4$ 일 때, $\triangle BCF$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $3\sqrt{6}$

해설



$\overline{AF} = a$ 라 하면 $\overline{AD} = \overline{AF} = a$, $\overline{BD} = \overline{BE} = 5-a$, $\overline{CE} = \overline{CF} = 4-a$

$\overline{BC} = (5-a) + (4-a) = 7$ 이므로 $a = \overline{AF} = 1$, $\overline{FC} = 3$

다음 그림에서 $\overline{CH} = x$ 라 하면 $\overline{BH} = 7 - x$

$\overline{AH}^2 = 4^2 - x^2 = 5^2 - (7-x)^2$

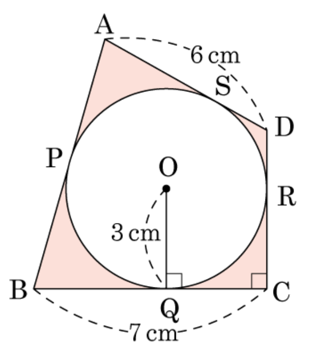
$\therefore\ x = \frac{20}{7}$

$\triangle AHC$ 에서 $\overline{AH} = \sqrt{4^2 - (\frac{20}{7})^2} = \sqrt{16 - \frac{400}{49}} = \sqrt{\frac{384}{49}} = \frac{8}{7}\sqrt{6}$

$\therefore\ \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{8}{7}\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

이때 $\overline{AF} : \overline{FC} = 1 : 3$ 이므로 $\triangle BCF = \frac{3}{4}\triangle ABC = \frac{3}{4} \times 4\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$ 이다.

29. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 3cm 인 원에 외접하는 사각형 ABCD 에 대하여 P, Q, R, S 는 접점이고, $\overline{AD}$ = 6cm, $\overline{BC}$ = 7cm, $\angle BCD = 90°$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.

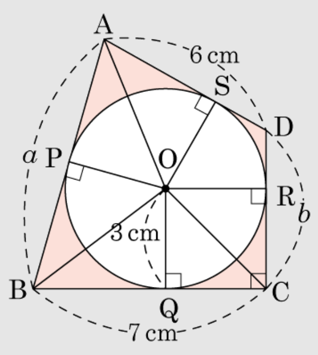


▶ 답 : ______ cm^2

▷ 정답 : $39 - 9\pi$ cm^2

해설

다음 그림에서 $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$ 라 하면 $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{CD}$ 이므로



$a + b = 13$, $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = \overline{OS} = 3$

$\therefore \square ABCD$

$= \triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OCD + \triangle ODA$

$= \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{OP} + \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{OQ} + \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{OR} + \frac{1}{2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{OS}$

$= \frac{3}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA})$

$= \frac{3}{2} \times 26 = 39(cm^2)$

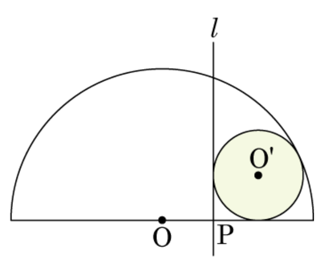
원 O 의 넓이는 $9\pi cm^2$ 이므로

(색칠한 부분의 넓이)

= (□ABCD의 넓이) – (원 O의 넓이)

$= 39 - 9\pi$ cm^2

30. 다음 그림과 같이 반지름이 $\frac{5}{2}$ 인 반원 O 의 지름 위에 $\overline{\mathrm{OP}} = \frac{7}{10}$ 인 점 P 를 지나면서 지름에 수직인 직선 l 을 그었을 때, 직선 l 과 반원 O 에 접하는 원 O′ 의 반지름의 길이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{4}{5}$

해설

원 O′ 의 반지름을 x 라 하면

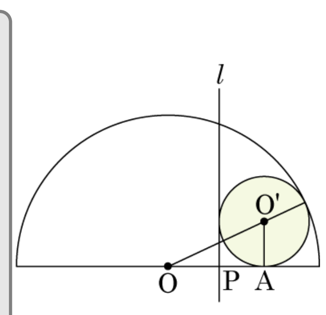
$\overline{\mathrm{OO'}} = \frac{5}{2} - x$

$\overline{\mathrm{OA}} = \frac{7}{10} + x$

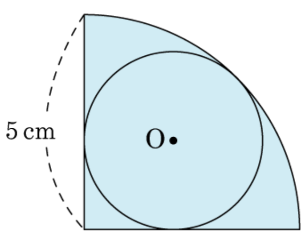
$\left(\frac{5}{2} - x\right)^2 = \left(x + \frac{7}{10}\right)^2 + x^2$

$25x^2 + 160x - 144 = 0$

$\therefore\ x = \frac{4}{5} (\because\ x > 0)$



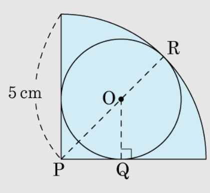
31. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 5cm 인 사분원에 내접하는 원 O 가 있다. 원 O 의 반지름의 길이는?



① $(5\sqrt{2}-5)$cm　② $(4\sqrt{2}-5)$cm　③ $(3\sqrt{2}-5)$cm
④ $(2\sqrt{2}-5)$cm　⑤ $(\sqrt{2}-5)$cm

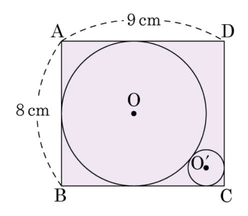
해설

원 O 의 반지름을 $x$cm 라 한다.
그림과 같이 보조선을 그으면



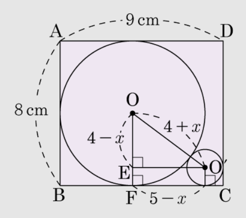
$\overline{PR} = \overline{PO} + \overline{OR}$
$\sqrt{2}x + x = 5$
$(\sqrt{2}+1)x = 5$
$x = 5(\sqrt{2}-1)$

32. 다음 그림과 같이 가로의 길이가 9cm , 세로의 길이가 8cm 인 직사각형에 서로 접하는 두 원이 있다. 이때 큰 원과 작은 원의 넓이의 합은?



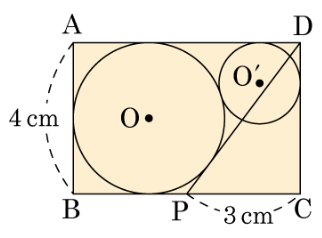
① $4\pi\text{cm}^2$ ② $16\pi\text{cm}^2$ ③ $17\pi\text{cm}^2$
④ $18\pi\text{cm}^2$ ⑤ $20\pi\text{cm}^2$

해설



큰 원의 반지름은 4 cm,
작은 원의 반지름을 x cm 라 하면
$\overline{\mathrm{OO'}} = 4 + x,\ \overline{\mathrm{OE}} = 4 - x,\ \overline{\mathrm{O'E}} = \overline{\mathrm{CF}} = 5 - x$ 이므로
$(4 + x)^2 = (4 - x)^2 + (5 - x)^2$
$x^2 - 26x + 25 = 0, (x - 1)(x - 25) = 0\ \ \therefore\ \ x = 1$
따라서 두 원의 넓이의 합은 $\pi \times 4^2 + \pi \times 1^2 = 17\pi(\text{cm}^2)$ 이다.

33. 다음 그림에서 사각형 ABCD 는 직사각형이고, $\overline{AB} = 4\text{cm}$, $\overline{PC} = 3\text{cm}$ 이다. 사각형 ABPD 가 원 O 에 외접하고 원 O′ 은 원 O 에 접하고, 변 AD, CD 에 접한다. 원 O′ 의 반지름은?



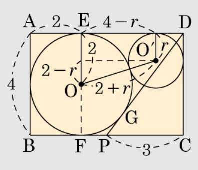
① $(8+4\sqrt{3})$ cm ② $(8-4\sqrt{3})$ cm ③ $(4+2\sqrt{3})$ cm
④ $(4-2\sqrt{3})$ cm ⑤ 1 cm

해설

$\overline{FP} = \overline{GP} = x\text{cm}$ 라 하자.
$\triangle$DPC 에서

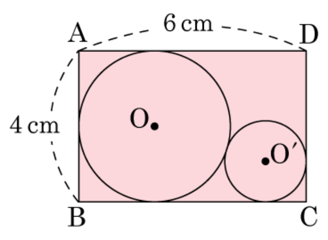
$$\overline{DP} = \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{PC}^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5(\text{cm})$$

$\overline{DG} = 5 - x(\text{cm})$
또 $\overline{ED} = \overline{FC} = \overline{FP} + \overline{PC} = x + 3(\text{cm})$
$\overline{ED} = \overline{DG}$ 이므로 $x + 3 = 5 - x$, $x = 1$
$\therefore \overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED} = 2 + 4 = 6$ (cm)



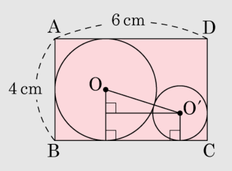
원 O′ 의 반지름을 $r$cm 라 하면
$(2+r)^2 = (2-r)^2 + (4-r)^2$
$r^2 - 16r + 16 = 0$
$\therefore r = 8 - 4\sqrt{3}(\because 0 < r < 2)$

34. 가로 세로 길이가 6cm, 4cm 인 직사각형에서 가능한 한 큰 원을 오려내고, 남은 부분에서 또 가능한 한 큰 원을 오려낼 때 두 번째 원의 반지름의 길이는?

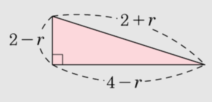


① $(6-4\sqrt{3})$cm　② $(4-4\sqrt{3})$cm　③ $(8-4\sqrt{3})$cm
④ $(6-\sqrt{3})$cm　⑤ $(8-\sqrt{3})$cm

해설



작은 원의 반지름을 r cm 라고 하면 큰 원의 반지름은 2cm 이므로



$(2-r)^2+(4-r)^2=(2+r)^2$
$\therefore r=8-4\sqrt{3}(\because 0<r<2)$