1. 방정식 $\frac{x+2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2x+1}{4}$ 의 해를 구하면?

① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{1}{3}$　⑤ 1

해설

양변에 12를 곱하면 $4(x+2)-6=3(2x+1)$

이항하여 정리하면 $4x-6x=3-8+6$, $-2x=1$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$

2. 방정식 $|x+5|=1$를 만족하는 x의 값들의 합은?

① -9 ② -10 ③ -11 ④ -12 ⑤ -13

해설

$|x+5|=1$

$\Rightarrow \quad x+5=1$ 또는 $x+5=-1$

$\therefore \quad x=-4$ 또는 $x=-6$

3. 방정식 $|x-1|=5$의 모든 해의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$|x-1|=5$에서 $x-1=\pm5$

(ⅰ) $x-1=5$일 때, $x=6$

(ⅱ) $x-1=-5$일 때, $x=-4$

따라서 방정식의 두 실근의 합은

$6+(-4)=2$

4. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$
모든 x에 대해 성립하려면
$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$
공통근 : $a=1$

5. 방정식 $(k^2-3)x+1=-k(2x-1)$ 에 대하여 해가 무수히 많이 존재하기 위한 k 의 값을 k_1, 해가 존재하지 않기 위한 k 의 값을 k_2 라 할 때, k_1+k_2 의 값을 구하면?

① -1 ② 3 ③ -3 ④ 1 ⑤ -2

해설

$(k^2+2k-3)x=k-1,\quad (k-1)(k+3)x=k-1$

$k=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ (부정)

$\therefore\ k_1=1$

$k=-3$ 일 때, $0\cdot x=-4$ (불능)

$\therefore\ k_2=-3$

$\therefore\ k_1+k_2=-2$

6. 방정식 $(k^2-6)x = k(x+1)+2$의 해가 존재하지 않을 때, k의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

x에 대하여 정리하면
$(k^2-k-6)x = k+2$
$(k+2)(k-3)x = k+2$
$k = 3$일 때, $0 \cdot x = 5$ (불능)

7. 방정식 $a^2x+1=a(x+1)$ 의 해가 존재하지 않을 때, 상수 a 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$a^2x+1=a(x+1)$ 에서 $a(a-1)x=a-1$

i) $a=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.

ii) $a=0$ 이면 $0\cdot x=-1$ 이므로 해가 없다.

iii) $a\neq 0, a\neq 1$ 일 때, $x=\dfrac{a-1}{a(a-1)}=\dfrac{1}{a}$

따라서 해가 없을 때의 a 의 값은 0 이다.

8. 방정식 $a^2-(1+x)a+2x-2=0$의 해가 무수히 많을 때, 방정식 $x=(x+3)a-10$의 해는?

① -3　② -1　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$a^2-a-ax+2x-2=0$, $(a-2)x=a^2-a-2$
$(a-2)x=(a-2)(a+1)$
ⅰ) $a\neq 2$일 때, $x=a+1$
ⅱ) $a=2$일 때, $0\cdot x=0$ 이므로 해는 무수히 많다.
ⅰ), ⅱ)에서 $a=2$일 때이다.
따라서 방정식 $x=(x+3)a-10$에 $a=2$를 대입하면
$x=(x+3)\cdot 2-10, x=2x-4 \therefore x=4$

9. 일차방정식 $a^2x+1=a^4-x$의 해는? (단, a는 실수)

① a　　② $a+1$　　③ $a-1$

④ a^2-1　　⑤ a^2+1

해설

$a^2x+1=a^4-x$ 에서 $a^2x+x=a^4-1$

$(a^2+1)x=(a^2-1)(a^2+1)$

$\therefore x=a^2-1(\because a^2+1>0)$

10. 다음 보기는 방정식 $(ax-1)a = x-1$ 의 해에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면?

보기

㉠ $a=-1$ 이면 해가 없다.

㉡ $a=1$ 이면 오직 하나의 해를 갖는다.

㉢ $a \neq \pm 1$ 이 아니면 해는 무수히 많다.

① ㉠　② ㉡　③ ㉠, ㉢　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$(ax-1)a = x-1$ 에서
$(a^2-1)x = a-1$
$(a-1)(a+1)x = a-1$
㉠ $a=-1$ 이면 $0 \cdot x = -2$ 이므로 해가 없다.
㉡ $a=1$ 이면 $0 \cdot x = 0$ 이므로 해는 무수히 많다.
㉢ $a \neq \pm 1$ 이면 $x = \dfrac{1}{a+1}$
따라서 옳은 것은 ㉠뿐이다.

11. $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3-x)^2}=x+3$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 α, β라 할 때, $3\alpha\beta$의 값은?

① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

해설

(준식)$=|x-1|+|3-x|=x+3$

ⅰ) $x<1$

$-x+1+3-x=x+3$, $3x=1$

$\therefore x=\frac{1}{3}$

ⅱ) $1\leq x<3$

$x-1+3-x=x+3$,

$x=-1$(해가 아니다)

ⅲ) $x\geq 3$

$x-1-3+x=x+3x=7$

두 근이 $\frac{1}{3}$, 7

$\therefore 3\alpha\beta=7$

12. $|x-2|+|x-3|=1$을 만족하는 실수 x의 개수는?

① 0개　　② 1개　　③ 2개
④ 3개　　⑤ 4개이상

해설

$|x-2|+|x-3|=1$에서
ⅰ) $x<2$일 때,
$-(x-2)-(x-3)=1$
$\therefore\ x=2$ (성립하지 않음)
ⅱ) $2\le x<3$일 때,
$(x-2)-(x-3)=1$
$\therefore\ 0\cdot x=0$ (모든 실수)
ⅲ) $x\ge 3$일 때,
$(x-2)+(x-3)=1$
$\therefore\ x=3$

13. 방정식 $|x+1| + \sqrt{(x-2)^2} = x+3$의 근을 α, β라 할 때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 0　　② 4　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

해설

i) $x < -1$일 때,
$-(x+1)-(x-2) = x+3$
$\therefore\ x = -\frac{2}{3}$ ($x < -1$에 부적합)
ii) $-1 \le x < 2$일 때,
$x+1-(x-2) = x+3$
$\therefore\ x = 0$
iii) $x \ge 2$일 때,
$x+1+x-2 = x+3$
$\therefore\ x = 4$
(i), (ii), (iii)에 의해 $x = 0,\ 4$
$\therefore\ \alpha+\beta = 4$

14. $|1-|1-|1-x||| = x-1$을 만족시키는 x의 최솟값, 최댓값을 각각 m, M이라 할 때, $m+M$의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$x-1 = |1-|1-|1-x||| \geq 0$

$\therefore\ x \geq 1$

$x \geq 1$이면 $|1-x| = x-1$

$\therefore |1-|1-x|| = \left|1-(x-1)\right| = |2-x|$

$1 \leq x \leq 2$이면

$|2-x| = 2-x$이므로

$$\begin{aligned}(\text{좌변}) &= \left|1-(2-x)\right| \\ &= |x-1| \\ &= x-1 = (\text{우변})\end{aligned}$$

$\therefore\ 1 \leq x \leq 2$인 모든 실수 x

$\therefore\ m=1,\ M=2,\quad M+m=3$

15. x보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 $< x >$로 나타낼 때, 방정식 $[x] + < x >= 7$의 해를 구하면?

① $\frac{7}{2}$ ② $3 \le x \le 4$ ③ $3 \le x < 4$
④ $3 < x \le 4$ ⑤ $3 < x < 4$

해설

x가 정수 k일 때,
$[x] =< x >= k$
$k < x < k+1$일 때,
$[x] = k, < x >= k+1$
따라서 $[x] + < x >= 7$이고
$[x], < x >$는 정수이므로
$[x] = 3, \ < x >= 4 \ (\because \ [x] \le < x >)$
$\therefore \ 3 < x < 4$