1. 그래프의 모양이 $y=-2x^2$ 과 같고 $x=1$ 일 때 최댓값 5 를 갖는다. 이때, 이 함수의 식은?

① $y=-2x^2-4x+4$
② $y=-2x^2-4x+5$
③ $y=-2x^2+4x-3$
④ $y=-2x^2+4x+3$
⑤ $y=-2x^2-x+5$

해설

꼭짓점의 좌표가 (1, 5), x^2 의 계수가 -2 이므로

$y=-2(x-1)^2+5$
$=-2(x^2-2x+1)+5$
$=-2x^2+4x+3$
$\therefore y=-2x^2+4x+3$

2. 두 이차함수의 그래프 $y=x^2-2ax+4,\ y=2x^2-2ax+a^2+3a$가 모두 x축과 교점을 갖도록 상수 a의 값의 범위를 정하면?

① $-9 \le a \le -5$　② $-6 \le a \le -2$　③ $-3 \le a \le 0$
④ $2 \le a \le 5$　⑤ $3 \le a \le 7$

해설

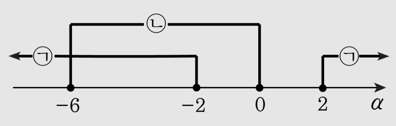
이차함수 $y=x^2-2ax+4$의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면
$x^2-2ax+4=0$에서

$$\frac{D_1}{4}=a^2-1\cdot 4\ \ge 0,\ a^2-4\ge 0,\ (a+2)(a-2)\ge 0$$

$\therefore a \le -2$ 또는 $a \ge 2 \cdots\cdots$ ㉠
또, 이차함수 $y=2x^2-2ax+a^2+3a$의 그래프가 x 축과 교점을 가지려면
$2x^2-2ax+\left(a^2+3a\right)=0$에서

$$\frac{D_2}{4}=a^2-2\left(a^2+3a\right)\ge 0,\ a^2+6a\le 0,\ a(a+6)\le 0$$

$\therefore -6 \le a \le 0 \cdots\cdots$ ㉡
이 때, ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음과 같다.



(1) 두 그래프 모두 x축과 교점을 갖도록 하는 a의 값의 범위는 위의 수직선에게 ㉠과 ㉡의 공통 부분이므로 $-6 \le a \le -2$

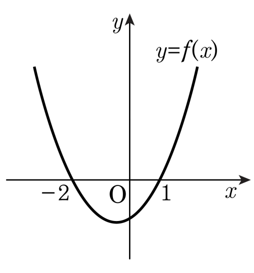
3. 이차함수 $y = x^2 - kx + 3k + 2$의 그래프에 의하여 잘려지는 x축의 길이가 3일 때, 모든 실수 k의 값의 합은?

① 6　② 8　③ 10　④ 12　⑤ 14

해설

이차함수 $y = x^2 - kx + 3x + 2$ 의 그래프와 x 축과의 교점의 좌표를 $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ 이라 하면
$\alpha,\ \beta$ 는 이차방정식 $x^2 - kx + 3k + 2 = 0$ 이 두 근이다.
근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = k,\ \alpha\beta = 3k + 2$
잘려지는 x 축의 길이가 3이므로 $|\alpha - \beta| = 3$
이 때, $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$이므로 $9 = k^2 - 4(3k + 2)$
$k^2 - 12k - 17 = 0$
따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 합은 12이다.

4. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



① -3　　② -2　　③ -1

④ 0　　⑤ 1

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.
$y=f(x)$ 이 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로
$y=f(x+a)$ 의 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$
따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이
$-2-a,\ 1-a$ 이고
그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$
$\therefore a=-3$

5. 이차함수 $y = x^2 - kx + 4$ 의 그래프가 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 상수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $k < -2,\ k > 2$　② $k < -4,\ k > 4$　③ $k < -1,\ k > 1$

④ $k < 0,\ k > 4$　⑤ $k < 0,\ k > 2$

해설

판별식 D 가 $D > 0$ 이어야 하므로

$D = k^2 - 4 \cdot 4 > 0$

$(k-4)(k+4) > 0$

$\therefore\ k < -4,\ k > 4$

6. 축이 $x=2$ 이고, 두 점 $(0,\ 3),\ (1,\ 6)$ 를 지나는 이차함수의 최댓값 또는 최솟값은?

① 최댓값 7　② 최댓값 5　③ 최솟값 7
④ 최솟값 5　⑤ 최댓값 −7

해설
축이 $x=2$ 이므로$y=a(x-2)^2+q$
두 점 $(0,\ 3),\ (1,\ 6)$ 을 지나므로
$3=4a+q,\ 6=a+q$
$\therefore a=-1,\ q=7$
$y=-(x-2)^2+7$
따라서 $x=2$ 일 때, 최댓값 7 을 가지며 최솟값은 없다.

7. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + 2a - 1$의 최솟값을 m이라 할 때, m의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = x^2 - 2ax + 2a - 1 = (x - a)^2 - a^2 + 2a - 1$
이므로 $x = a$일 때 최솟값 $-a^2 + 2a - 1$을 가진다.
$\therefore m = -a^2 + 2a - 1 = -(a - 1)^2$
따라서 m은 $a = 1$일 때, 최댓값 0을 가진다.

8. 이차함수 $y = -x^2 - 2ax + 4a - 4$의 최댓값을 M이라 할 때, M의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -8

해설

$y = -x^2 - 2ax + 4a - 4 = -(x+a)^2 + a^2 + 4a - 4$
이므로 $x = -a$일 때 최댓값 $a^2 + 4a - 4$를 가진다.
$\therefore M = a^2 + 4a - 4 = (a+2)^2 - 8$
따라서 M은 $a = -2$일 때 최댓값 -8을 가진다.

9. 함수 $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 3) + 3x^2 - 6x$ 의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2 - 2x + 2 = t$ 로 놓으면
$t = (x-1)^2 + 1 \geq 1$ 이고

$$\begin{aligned} f(x) &= g(t) = t(t+1) + 3t - 6 \\ &= t^2 + 4t - 6 \\ &= (t+2)^2 - 10 \ (t \geq 1) \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은
$g(1) = (1+2)^2 - 10 = -1$

10. 합이 28 인 두 자연수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 100 ② 121 ③ 144 ④ 169 ⑤ 196

해설

한 자연수를 x 라 하면, 나머지는 $28 - x$ 이다.
두 자연수의 곱은 $x(28 - x)$ 이다.
$x(28 - x) = -x^2 + 28x = -(x - 14)^2 + 196$

11. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$

$= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9$

$x,\ y,\ z$는 실수이므로

$(x-2)^2 \geq 0,\ y^2 \geq 0,\ z^2 \geq 0$

따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$는

$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,

최댓값 9를 갖는다.

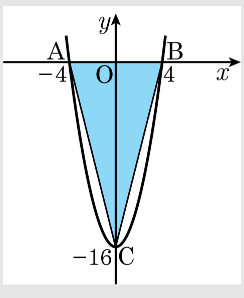
12. 이차함수 $y = x^2 - 16$ 의 그래프에서 x 축과의 교점을 A, B 라 하고 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle$ABC 의 넓이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

x 축과의 교점A, B 는 $x^2 - 16 = 0$ 의 근과 같다.
따라서 $x = \pm 4$ 이다.



꼭짓점의 좌표는 (0, -16) 이다.

구하는 넓이는 $\frac{1}{2} \times 8 \times 16 = 64$ 이다.

13. 다음 방정식 중에서 실근의 개수가 가장 많은 것은?

① $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$

② $x^4 + x^2 - 2 = 0$

③ $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

④ $x^4 - 16 = 0$

⑤ $5x^2 - 4x + 1 = 0$

해설

조립제법과 인수분해를 통하여 근을 구한다

① $(x-2)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow$ 실근 1개, 허근 2개

② $(x^2-1)(x^2+2) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

③ $(x-3)(x+4)(x-2) = 0 \Rightarrow$ 실근 3개

④ $(x^2+4)(x^2-4) = 0 \Rightarrow$ 실근 2개, 허근 2개

⑤ $x = \frac{2 \pm i}{5} \Rightarrow$ 허근 2개

14. 사차방정식 $x^4 - 2x^3 + x^2 - 4 = 0$ 의 서로 다른 두 허근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

-1	1	-2	1	0	-4
		-1	3	-4	4
2	1	-3	4	-4	0
		2	-2	4	
	1	-1	2	0	

$(x+1)(x-2)(x^2 - x + 2) = 0$
따라서 두 허근은 $x^2 - x + 2 = 0$ 의 근
허근의 합은 근과 계수와의 관계에 의해 $\alpha + \beta = 1$

15. 삼차방정식 $x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $\alpha - \beta - \gamma$ 의 값은?(단, $\alpha < \beta < \gamma$)

① -3 ② -4 ③ -5 ④ -6 ⑤ -7

해설

$x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0$ 인수분해하여 해를 구하면

$(x-1)(x-2)(x-5) = 0$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 5$

$\therefore\ \alpha - \beta - \gamma = 1 - 2 - 5 = -6$

16. 방정식 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

▷ 정답 : $x=2$

▷ 정답 : $x=3$

해설

$f(1)=1^3-6\times1^2+11\times1-6=0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$ 을 인수로 갖는다.
따라서 $f(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 몫을 다음 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x)=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3)=0$
$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

17. 사차식 x^4-4x^2-12 를 복소수의 범위에서 인수분해하면?

① $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$
② $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+2i)(x-2i)$
③ $(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$
④ $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2i)(x-2i)$
⑤ $(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{6}i)(x-\sqrt{6}i)$

해설

$x^4-4x^2-12,\quad x^2=Y$ 라 하자
$\Rightarrow\quad Y^2-4Y-12=(Y+2)(Y-6)=0$
$Y=-2$ 또는 $Y=6$
$\Rightarrow\quad x^2=-2,\quad x^2=6$
$\Rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}i,\quad x=\pm\sqrt{6}$
$\therefore\ x^4-4x^2-12$
$=(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i)$

18. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서
$x^2-2x=t$ 로 놓으면
$t(t-2)-3=0$,
$t^2-2t-3=0$
$(t-3)(t+1)=0$
$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$
(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때
$x^2-2x-3=0$
$(x-3)(x+1)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$
(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$\therefore\ x=1$ (중근)
따라서, $-1\times3\times1=-3$

19. 사차방정식 $2x^4+7x^2-4=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\dfrac{\beta}{\alpha}$의 값은?

① $1+i$ ② i ③ 0 ④ -1 ⑤ 24

해설

$2x^4+7x^2-4=0$에서 $x^2=t$라 하면
$2t^2+7t-4=0$, $(2t-1)(t+4)=0$

$\therefore\ t=\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=-4$

$\therefore\ x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ 또는 $x=\pm 2i$

이 때, α, β는 허근이므로
$\alpha=2i$, $\beta=-2i$ 또는 $\alpha=-2i$, $\beta=2i$

$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha}=-1$

20. 방정식 $(x^2+2)^2-6x^2-7=0$의 두 실근의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$(x^2+2)^2-6x^2-7=0$에서

$x^4+4x^2+4-6x^2-7=0$

$x^4-2x^2-3=0$

$x^2=t$로 치환하면

$t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(ⅰ) $x^2=3$일 때, $x=\pm\sqrt{3}$

(ⅱ) $x^2=-1$일 때, $x=\pm i$

(ⅰ), (ⅱ)에서 실근의 합을 구하면

$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$

21. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$　　② $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$　　③ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

④ $1+\sqrt{3}i$　　⑤ $\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

해설

$x^4 + x^2 + 1 = 0$을 변형하면

$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0,$

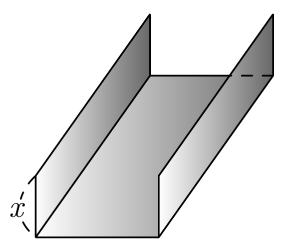
$(x^2+1)^2 - x^2 = 0$

$(x^2+1+x)(x^2+1-x) = 0,$

$x^2 + x + 1 = 0$ 또는 $x^2 - x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

22. 다음 그림과 같이 폭이 20 cm 인 양철판을 구부려서 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대일 때, x의 값은?



① 4 cm ② 5 cm ③ 6 cm ④ 7 cm ⑤ 8 cm

해설

단면의 세로의 길이를 x cm 라 하면
가로의 길이는 $(20-2x)$ cm
단면의 넓이를 S m^2 라 하면
$S = x(20-2x) = -2x^2 + 20x$
$= -2(x-5)^2 + 50 \ (0 < x < 10)$
따라서 $x = 5$(cm) 일 때,
S 는 최댓값 $50\,\mathrm{m}^2$ 를 갖는다.

23. 방정식 $2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$의 모든 실근의 합을 a, 모든 허근의 곱을 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 5　　② 3　　③ $\frac{3}{2}$　　④ -2　　⑤ 4

해설

$2x^4-5x^3+x^2-5x+2=0$ 양변을
x^2으로 나누고 정리하면

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+1=0$$

$$2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$2t^2-5t-3=(2t+1)(t-3)=0$$

$$\left(2x+\frac{2}{x}+1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)=0$$

$\therefore (2x^2+x+2)(x^2-3x+1)=0$
이 때, $2x^2+x+2=0$은 허근을 갖고,
$x^2-3x+1=0$은 실근을 가지므로
실근의 합 $a=3$, 허근의 곱 $b=1$이다.
$\therefore a+b=4$