1. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4)+g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$

$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$

$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

2. $f(x) = \begin{cases} 4x^2+1 & (x \ge 0) \\ 2x+1 & (x < 0) \end{cases}$, $g(x) = 3x-7$ 일때, $(g^{-1} \circ f)^{-1}(3)$ 의 값은 얼마인가?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ 2

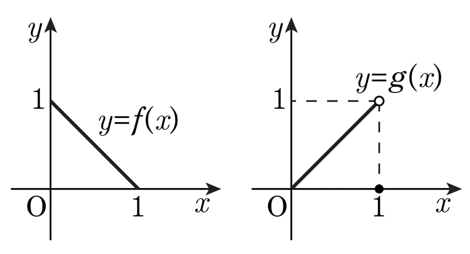
해설

$(g^{-1} \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = f^{-1} \circ g$ 이고
$g(x) = 3x - 7$ 에서 $g(3) = 3 \times 3 - 7 = 2$ 이다.
$(g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = (f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3))$
$= f^{-1}(2)$
$(f^{-1})(2) = a$ 라 하면 $f(a) = 2$
그런데 $a < 0$ 일 때, $2a + 1 < 1$ 이므로
이 범위에서 $f(a) = 2$ 가 되는 a 는 없다.
따라서, $a \ge 0$ 이고 $f(a) = 4a^2 + 1 = 2$ 에서
$4a^2 = 1$
$\therefore a = \frac{1}{2} (\because a \ge 0)$
$\therefore (g^{-1} \circ f)^{-1}(3) = \frac{1}{2}$

3. 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 다음 성질을 만족시킨다.

> Ⅰ. $f(x)$와 $g(x)$는 주기가 2인 주기함수이다.
> Ⅱ. 임의의 실수 x 에 대하여
> $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$

함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프의 일부가 각각 다음과 같을 때, $f\left(g\left(-\frac{7}{3}\right)\right)$ 의 값을 구하면?



① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

Ⅱ. 에 의하여
$y = f(x)$ 의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고,
$y = g(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$$g\left(-\frac{7}{3}\right) = -g\left(\frac{7}{3}\right) = -g\left(2+\frac{1}{3}\right)$$
$$= -g\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}$$

($\because \ -1 < x < 1$ 에서 $g(x) = x$) 이고
$0 \le x \le 1$ 에서 $f(x) = -x+1$

따라서 $f\left(g\left(-\frac{7}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{3}\right)$
$$= -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

4. 집합 $X = \{x \mid -1 \le x \le 3\}$에 대하여 X에서 X로의 일차함수 $f(x) = ax + b$의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a와 b의 합 $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

1) $a > 0$일 때 $f(-1) = -1,\ f(3) = 3$을 만족

$-a + b = -1,\ 3a + b = 3$

따라서 $a = 1,\ b = 0$

2) $a < 0$일 때 $f(-1) = 3,\ f(3) = -1$

$-a + b = 3,\ 3a + b = -1$

따라서 $a = -1,\ b = 2$

1), 2)에서 $a > 0$일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$

$a < 0$일 때 $a + b = -1 + 2 = 1$

즉 $a + b = 1$

5. 임의의 두 양수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 이고 $f(3) = 1$ 일 때, $f(27)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 3,\ y = 3$ 일 때

$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$

$x = 9,\ y = 3$ 일 때

$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$

6. $f(x) = 2x - 3$ 일 때, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$ 를 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$f(f(x)) = 4x - 9,\quad f(f(f(x))) = 8x - 21$ 이므로

$4x - 9 = 8x - 21$

$\therefore\ x = 3$

7. $-4 \le x < 4$ 일 때, 함수 $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ 의 치역의 원소의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 10 개

해설

i) $-4 \le x < -2$ 일 때,
$-2 \le \frac{x}{2} < -1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -2$

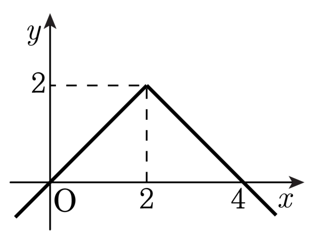
ii) $-2 \le x < 0$ 일 때,
$-1 \le \frac{x}{2} < 0$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = -1$

iii) $0 \le x < 2$ 일 때,
$0 \le \frac{x}{2} < 1$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 0$

iv) $2 \le x < 4$ 일 때,
$1 \le \frac{x}{2} < 2$ 이므로 $y = \left[\frac{x}{2}\right] = 1$

이상에서 주어진 함수의 치역이 $\{-2, -1, 0, 1\}$ 이므로 치역의 원소의 개수는 4 개이다.

8. $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1 개　　② 2 개　　③ 3 개

④ 4 개　　⑤ 무수히 많다.

해설

$f(x) = \begin{cases} y = x(x \le 2) & \cdots ㉠ \\ y = -x + 4(x > 2) & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x) = x$

$\therefore x = 1$

㉡에서는 $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(-x + 4)$

$= -x + 4$

$\therefore x = 3$

실근의 개수 : 2 개.